

Indice

1	Insiemi, numeri e polinomi	1
1.1	Insiemi	1
1.1.1	Sottoinsiemi	1
1.1.2	Prodotto cartesiano e relazioni binarie	3
1.2	Sommatorie	4
1.3	Insiemi numerici	8
1.3.1	Struttura algebrica	9
1.3.2	Struttura d'ordine	12
1.3.3	Valore assoluto, segno, parti intere	12
1.3.4	Principio di induzione	13
1.3.5	Campi ordinati	15
1.3.6	Potenze, esponenziali e logaritmi	17
1.4	Polinomi a coefficienti reali	18
1.4.1	Algebra dei polinomi	18
1.4.2	Radici di un polinomio	19
1.4.3	Formula del binomio di Newton	21
1.5	Numeri complessi	23
1.5.1	Equazioni di secondo grado	23
1.5.2	Forma algebrica	24
1.5.3	Piano di Gauss	26
1.5.4	Forma trigonometrica	27
1.6	Polinomi a coefficienti complessi	33
2	Funzioni	35
2.1	Funzioni tra insiemi	35
2.1.1	Definizione	35
2.1.2	Composizione di funzioni	36
2.1.3	Funzioni iniettive, suriettive e biunivoche	37
2.2	Cardinalità	38
2.3	Funzioni reali di variabile reale	42
2.3.1	Operazioni algebriche	42
2.3.2	Grafico di una funzione	43
2.3.3	Funzioni pari e funzioni dispari	46
2.3.4	Funzioni limitate	48
2.3.5	Funzioni monotone	48
2.3.6	Funzioni periodiche	49

3	Successioni numeriche	51
3.1	Proprietà elementari	51
3.2	Limiti	52
3.3	Proprietà delle successioni convergenti	54
3.4	Successioni monotone	56
3.5	Il numero e	57
3.6	Equivalenza asintotica	60
4	Limiti di funzioni	63
4.1	Limiti	63
4.1.1	Limiti finiti	63
4.1.2	Limite destro e limite sinistro	65
4.1.3	Limiti infiniti e limiti all'infinito	66
4.2	Proprietà delle funzioni convergenti	67
4.3	Funzioni continue	69
4.3.1	Definizione	69
4.3.2	Limiti di funzioni continue	70
4.3.3	Teorema degli zeri	72
4.3.4	Teorema di Weierstrass e teorema dei valori intermedi	73
4.4	Equivalenza asintotica	74
4.5	Alcuni limiti notevoli	75
4.6	Punti di discontinuità	79
4.7	Funzioni infinitesime e infinite	82
4.7.1	Infinitesimi e confronto di infinitesimi	82
4.7.2	Ordine e parte principale di un infinitesimo	83
4.7.3	Infiniti e confronto di infiniti	84
4.7.4	Ordine e parte principale di un infinito	85
4.7.5	Relazione di rapporto infinitesimo (o piccolo)	85
4.8	Asintoti	87
4.8.1	Asintoti orizzontali	87
4.8.2	Asintoti verticali	88
4.8.3	Asintoti obliqui	89
5	Calcolo differenziale	93
5.1	Esempi preliminari	93
5.1.1	Retta tangente a una curva	93
5.1.2	Velocità e accelerazione istantanea	94
5.2	Derivabilità	94
5.3	Differenziabilità	96
5.4	Punti angolosi, flessi a tangente verticale, cuspidi e semicuspidi	97
5.5	Derivate di alcune funzioni elementari	99
5.6	Proprietà della derivata	101
5.7	Derivate successive	107
5.8	Proprietà delle funzioni derivabili	109
5.8.1	Teorema di Fermat e teorema di Rolle	109
5.8.2	Teorema del valor medio di Lagrange	111
5.8.3	Funzioni crescenti e decrescenti	113
5.8.4	Teorema degli incrementi finiti di Cauchy	114
5.8.5	Teoremi di De L'Hôpital	115
5.8.6	Massimi e minimi	120
5.8.7	Concavità	122

5.9	Approssimazione polinomiale	123
5.9.1	Sviluppi di MacLaurin	123
5.9.2	Sviluppi di MacLaurin di alcune funzioni elementari	126
5.9.3	Calcolo dei limiti	128
5.9.4	Sviluppi di Taylor	130
5.9.5	Massimi, minimi e flessi	132
5.9.6	Funzioni con polinomio di MacLaurin nullo	135
5.10	Il differenziale	137
5.11	Grafico di una funzione	138
6	Calcolo integrale	147
6.1	Integrale indefinito	147
6.1.1	Primitive	147
6.1.2	Integrali immediati	148
6.1.3	Integrazione per parti	151
6.1.4	Integrazione per sostituzione	153
6.1.5	Integrazione di funzioni razionali	155
6.1.6	Integrali razionalizzabili	162
6.2	Integrale definito	170
6.2.1	Definizione	170
6.2.2	Proprietà elementari	171
6.2.3	Teorema del valor medio	174
6.2.4	Primo teorema fondamentale del calcolo	177
6.3	Funzioni integrali	178
6.3.1	Definizione	178
6.3.2	Secondo teorema fondamentale del calcolo	179
6.3.3	Grafico di una funzione integrale	181
6.3.4	Polinomio di MacLaurin di una funzione integrale	183
6.4	Alcune stime asintotiche	185
6.5	Integrali impropri	189
6.5.1	Integrazione di funzioni non limitate	189
6.5.2	Integrazione su intervalli illimitati	195
6.6	Integrali dipendenti da un parametro	202
7	Equazioni differenziali del primo ordine	205
7.1	Introduzione	205
7.1.1	Primitive	205
7.1.2	Moto rettilineo	206
7.1.3	Famiglie di curve a un parametro	206
7.2	Equazioni differenziali ordinarie	207
7.3	Equazioni differenziali a variabili separabili	208
7.3.1	Ricerca dell'integrale generale	208
7.3.2	Problema di Cauchy	211
7.4	Equazioni differenziali lineari del primo ordine	214
7.4.1	Ricerca dell'integrale generale	214
7.4.2	Problema di Cauchy	218

8	Geometria analitica nello spazio	221
8.1	Vettori	221
8.1.1	Coordinate, punti e vettori	221
8.1.2	Operazioni algebriche tra vettori	222
8.1.3	Norma	224
8.1.4	Prodotto scalare	224
8.1.5	Prodotto vettoriale	225
8.1.6	Angoli	227
8.1.7	Prodotto misto	229
8.1.8	Orientazione dello spazio	231
8.2	Rette e piani	231
8.2.1	Equazioni parametriche della retta	231
8.2.2	Equazione cartesiana del piano	232
8.2.3	Condizioni di parallelismo e di ortogonalità	234
8.2.4	Proiezioni ortogonali e distanze	236
8.3	Sfere e circonferenze	238
8.3.1	Equazione cartesiana della sfera	238
8.3.2	Equazioni cartesiane della circonferenza	240
9	Geometria differenziale	243
9.1	Funzioni vettoriali	243
9.2	Curve	247
9.2.1	Rappresentazione delle curve	247
9.2.2	Curve spaziali	249
9.2.3	Curve regolari	250
9.2.4	Il teorema di Cauchy e il teorema di Peano	253
9.3	Integrazione lungo una curva	257
9.3.1	Lunghezza di una curva	257
9.3.2	Parametro arco	258
9.3.3	Integrali di linea (di prima specie)	260
9.3.4	Baricentro di una curva	263
9.4	Geometria intrinseca di una curva	266
9.4.1	Riferimento intrinseco	266
9.4.2	Curvatura e torsione	268
9.4.3	Proprietà intrinseche di una curva	271
9.4.4	Curve piane	273