

Capitolo 8

Alcune equazioni alle derivate parziali non lineari

Diversi fenomeni naturali non possono essere descritti da equazioni differenziali lineari. Quindi, la teoria sviluppata nei Capitoli 3 e 7 non può considerarsi esaustiva. Le equazioni differenziali non lineari possono essere estremamente diverse tra di loro e il loro studio richiede tecniche quasi ad hoc per ogni tipo. Non esiste quindi una teoria generale che permetta di affrontarle indipendentemente dalla loro natura. In questo capitolo, ci limitiamo a spiegare come analizzare tre tipi ben precisi di equazioni non lineari: quelle quasilineari del prim'ordine, quelle quasilineari della fluidodinamica (dette equazioni di Navier-Stokes) e quelle semilineari di tipo “calore stazionario con sorgente che dipende dalla temperatura”.

8.1 Equazioni quasilineari del prim'ordine

Questo paragrafo è dedicato allo studio di equazioni quasilineari del prim'ordine della forma

$$u_t + A(u)u_x = 0 \tag{8.1}$$

con $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $u = u(x, t)$ funzione a valori in \mathbb{R} e $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzione sufficientemente regolare. Per comprendere l'importanza di tale equazione presentiamo un paio di applicazioni.

Iniziamo con la descrizione del seguente modello fisico sulla dinamica dei gas, considerati ideali. Si consideri un tubo di lunghezza infinita all'interno del quale sia contenuto un gas e si indichino con v la sua velocità, con p la sua pressione e con ρ la sua densità. Si supponga che le grandezze fisiche appena introdotte siano costanti su ogni sezione trasversale del tubo e che esse possano essere quindi considerate funzioni di una sola variabile spaziale $x \in \mathbb{R}$ e del tempo $t \geq 0$. Inoltre si supponga che la velocità del gas sia in ogni punto parallela all'asse del tubo in modo che v possa essere considerata una grandezza scalare.

Nelle ipotesi fatte l'equazione (3.46) diventa

$$\rho_t + v\rho_x + \rho v_x = 0. \quad (8.2)$$

D'altra parte da (3.49) e (3.50) si ottiene

$$\rho v_t + \rho v v_x + p_x = 0. \quad (8.3)$$

In ipotesi di entropia costante e C_V (calore specifico a volume costante) costante, la pressione risulta essere una funzione della sola densità e cioè $p = f(\rho) = K_0 \rho^\gamma$ con $\gamma = C_p/C_V$ (C_p calore specifico a pressione costante) e K_0 costante opportuna. Da (8.2) e (8.3) si ottiene così il sistema di due equazioni nelle incognite ρ e v

$$\begin{cases} \rho_t + v\rho_x + \rho v_x = 0 \\ v_t + v v_x + \frac{f'(\rho)}{\rho} \rho_x = 0. \end{cases} \quad (8.4)$$

Una volta posto

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix}, \quad A(U) = A \begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & \rho \\ \frac{f'(\rho)}{\rho} & v \end{pmatrix},$$

il sistema (8.4) si riscrive nella forma

$$U_t + A(U)U_x = 0 \quad (8.5)$$

che è la versione vettoriale dell'equazione (8.1).

Nel seguito ci occuperemo esclusivamente dell'equazione scalare (8.1) e pertanto per maggiori dettagli sulla dinamica dei gas e sui sistemi quasilineari del tipo (8.5) rimandiamo il lettore a [65].

La seconda applicazione dell'equazione (8.1) riguarda un modello di traffico stradale. Se supponiamo di considerare un tratto di strada rettilineo di lunghezza infinita allora lo scorrere del traffico sulla strada può essere visto in buona approssimazione come un fluido di densità $\rho = \rho(x, t)$. In tale modello si supporrà che non vi siano sorgenti o pozzi di auto e cioè che non vi siano entrate o uscite dalla strada. Inoltre si supporrà che la velocità v delle automobili dipenda soltanto dalla densità ρ .

Con considerazioni del tutto analoghe a quelle del Paragrafo 3.2 si perviene all'equazione (8.2). Dette ρ_m la densità massima consentita e v_m la velocità massima consentita, è ragionevole supporre che

$$v(\rho) = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right) v_m. \quad (8.6)$$

Questa relazione costitutiva esprime il fatto che quando la densità è molto bassa, la velocità è prossima a quella massima consentita mentre quando la densità è prossima a quella massima consentita, la velocità è prossima a zero.

Inserendo (8.6) in (8.2) si ottiene l'equazione

$$\rho_t + \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_m}\right) v_m \rho_x = 0$$

che risulta essere del tipo (8.1) con $A(\rho) = \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_m}\right) v_m$.

8.1.1 Soluzioni classiche del problema di Cauchy

Ci occupiamo del seguente problema di Cauchy associato a (8.1)

$$\begin{cases} u_t + A(u)u_x = 0 & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T) \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (8.7)$$

con $0 < T \leq +\infty$.

Come nel Paragrafo 3.2.2 utilizziamo il metodo delle curve caratteristiche e cioè cerchiamo di determinare delle curve nel semipiano $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ lungo le quali una soluzione di (8.7) sia costante. Se le caratteristiche ammettono una rappresentazione parametrica della forma

$$\begin{cases} x = x(s) \\ t = t(s) = s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R}), \quad (8.8)$$

allora da (8.7) si deduce che affinché u sia costante lungo una caratteristica deve essere

$$x'(s) = A(u(x(s), t(s))).$$

D'altra parte, essendo u costante lungo una caratteristica, per ogni $s > 0$ si ha

$$A(u(x(s), t(s))) = A(u(x(0), 0)) = A(g(x(0))).$$

Siamo giunti alla conclusione che se $(x(s), t(s))$ è la parametrizzazione di una caratteristica passante per il punto $(x_0, 0)$ allora

$$\begin{cases} x(s) = x_0 + A(g(x_0))s \\ t(s) = s. \end{cases} \quad (8.9)$$

Possiamo quindi affermare che le curve caratteristiche sono rette come già visto per il problema lineare (3.4) ma a differenza di quel caso esse non sono necessariamente parallele in quanto la pendenza di ciascuna coincide con $1/A(g(x_0))$ dove $(x_0, 0)$ è il punto di intersezione tra la caratteristica considerata e l'asse x .

Per questo motivo, fissato un punto (x_0, t_0) con $x_0 \in \mathbb{R}$ e $t_0 > 0$ viene naturale chiedersi se esista una sola caratteristica passante per il punto (x_0, t_0) . In effetti in alcuni casi tale unicità può venire a mancare. Basta osservare che se esistono $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e $t_0 > 0$ tali che

$$x_1 + A(g(x_1))t_0 = x_2 + A(g(x_2))t_0$$

allora le caratteristiche passanti per $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$ si intersecano nel semipiano $\mathbb{R} \times (0, \infty)$. In questo caso, si dice che la soluzione u di (8.7) presenta il fenomeno delle **onde d'urto**. Come si vedrà in seguito, in tale circostanza la soluzione u potrebbe presentare delle discontinuità.

Tuttavia, sotto opportune ipotesi, questo fenomeno non può avvenire per tempi vicini all'istante iniziale. Supponiamo ad esempio che $A \in C^1(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$ e che la funzione $\xi \mapsto A'(g(\xi))g'(\xi)$ sia inferiormente limitata in \mathbb{R} :

$$\inf_{\xi \in \mathbb{R}} A'(g(\xi))g'(\xi) > -\infty. \quad (8.10)$$

Per dimostrare l'esistenza e l'unicità di una soluzione classica per tempi sufficientemente piccoli, si consideri la famiglia di rette nel piano (x, t) di equazione $x = \xi + A(g(\xi))t$ al variare di $\xi \in \mathbb{R}$. Si definisca poi la funzione

$$F(x, t, \xi) = \xi + A(g(\xi))t - x \quad \forall (x, t, \xi) \in \mathbb{R}^3. \quad (8.11)$$

Sia $T > 0$ definito da

$$T := \begin{cases} -\frac{1}{\inf_{\xi \in \mathbb{R}} A'(g(\xi))g'(\xi)} & \text{se } \inf_{\xi \in \mathbb{R}} A'(g(\xi))g'(\xi) < 0 \\ +\infty & \text{se } \inf_{\xi \in \mathbb{R}} A'(g(\xi))g'(\xi) \geq 0. \end{cases} \quad (8.12)$$

Fissato $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T)$ possiamo affermare che esiste un'unica $\xi = \xi(x, t) \in \mathbb{R}$ tale che $F(x, t, \xi) = 0$. Infatti si osservi che per ogni $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T)$

$$\frac{\partial F}{\partial \xi}(x, t, \xi) = 1 + A'(g(\xi))g'(\xi)t \geq 1 - \frac{t}{T} > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \quad (8.13)$$

dove $\frac{t}{T} = 0$ nel caso in cui $T = +\infty$. Una volta fissati $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T)$ si ha quindi che la mappa $\xi \mapsto F(x, t, \xi)$ è strettamente crescente e inoltre da (8.13)

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} F(x, t, \xi) = -\infty, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} F(x, t, \xi) = +\infty,$$

da cui segue l'esistenza di $\xi = \xi(x, t)$. Grazie al Teorema della Funzione Implicita (applicato in un aperto contenente $\mathbb{R} \times [0, T)$) si deduce anche che la mappa $(x, t) \mapsto$

$\xi(x, t)$ è di classe C^1 in $\mathbb{R} \times [0, T)$. In conclusione, per ogni punto $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times [0, T)$ esiste un'unica caratteristica passante per (x_0, t_0) e la sua equazione è data da

$$x = \xi(x_0, t_0) + A(g(\xi(x_0, t_0)))t.$$

Se u è una soluzione di (8.7) allora u deve essere costante lungo la caratteristica di equazione $x = \xi(x_0, t_0) + A(g(\xi(x_0, t_0)))t$ e, di conseguenza,

$$u(x, t) = u(\xi(x, t), 0) = g(\xi(x, t)) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T). \quad (8.14)$$

Abbiamo appena dimostrato il seguente

Teorema 8.1.1. *Siano $A, g \in C^1(\mathbb{R})$ tali che valga (8.10) e sia $T \in (0, \infty]$ la quantità definita in (8.12). Allora il problema (8.7) ammette un'unica soluzione $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, T))$ data dalla formula (8.14).*

Imponendo opportune condizioni di monotonia su A e g , grazie al Teorema 8.1.1, è possibile garantire l'esistenza di soluzioni di (8.7) su tutto $\mathbb{R} \times (0, \infty)$. Vale infatti il seguente

Corollario 8.1.2. *Siano $A, g \in C^1(\mathbb{R})$ funzioni non decrescenti (risp. non crescenti). Allora il problema (8.7) ammette un'unica soluzione $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ data dalla formula (8.14).*

In mancanza delle ipotesi di monotonia introdotte nel Corollario 8.1.2 non è possibile garantire l'esistenza di una soluzione definita per ogni $t > 0$. Per meglio chiarire come ciò possa accadere si supponga che $A, g \in C^1(\mathbb{R})$ e $A' > 0$ in \mathbb{R} . Detta $\xi = \xi(x, t)$ la funzione definita implicitamente dall'equazione $\xi + A(g(\xi))t - x = 0$, per quanto mostrato in precedenza, finchè esiste la soluzione u di (8.7), essa è data da $u(x, t) = g(\xi(x, t))$ e inoltre le sue derivate parziali sono date implicitamente da

$$u_t = -\frac{A(u)g'(\xi)}{1 + A'(u)g'(\xi)t} \quad \text{e} \quad u_x = \frac{g'(\xi)}{1 + A'(u)g'(\xi)t}. \quad (8.15)$$

Supponiamo che esista $\xi_0 \in \mathbb{R}$ tale che $g'(\xi_0) < 0$ e si consideri la caratteristica passante per $(\xi_0, 0)$:

$$\begin{cases} x(s) = \xi_0 + A(g(\xi_0))s \\ t(s) = s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

Essendo per ogni s , $\xi(x(s), s) = \xi_0$ e $u(x(s), s) = g(\xi_0)$, si ha

$$u_t(x(s), s) = -\frac{A(g(\xi_0))g'(\xi_0)}{1 + A'(g(\xi_0))g'(\xi_0)s} \quad \text{e} \quad u_x(x(s), s) = \frac{g'(\xi_0)}{1 + A'(g(\xi_0))g'(\xi_0)s}.$$

Si osserva immediatamente che le derivate parziali di u tendono all'infinito quando $s \rightarrow S := -1/(A'(g(\xi_0))g'(\xi_0)) > 0$. Quindi, la soluzione u non può essere prolungata di classe C^1 fino a $t = S$.

8.1.2 Soluzioni deboli del problema di Cauchy

Nel precedente paragrafo abbiamo constatato che non è possibile garantire l'esistenza di soluzioni classiche di (8.7) per tutti i $t > 0$. Tuttavia può essere significativo, non solo da un punto di vista matematico ma anche fisico, considerare soluzioni non classiche, da cui la necessità di introdurre una nozione di soluzione debole. Procediamo in modo formale supponendo che u sia una soluzione classica di (8.7) e cioè una funzione $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ verificante (8.7). Sia $\varphi \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ con supporto compatto in $\mathbb{R} \times [0, \infty)$: attenzione, potrebbe quindi essere $\varphi(x, 0) \neq 0$! Siano $a < b$ e $T > 0$ tali che $\text{supp}\varphi \subset [a, b] \times [0, T]$. Moltiplicando ambo i membri dell'equazione per φ e integrando si ha

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (u_t + A(u)u_x)\varphi \, dx \, dt = \int_{[a,b] \times [0,T]} (u_t + A(u)u_x)\varphi \, dx \, dt. \quad (8.16)$$

Integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{[a,b] \times [0,T]} u_t \varphi \, dx \, dt &= \int_a^b \left(\int_0^T u_t \varphi \, dt \right) dx \\ &= \int_a^b [u(x, T)\varphi(x, T) - u(x, 0)\varphi(x, 0)] dx - \int_a^b \left(\int_0^T u \varphi_t \, dt \right) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x, 0) \, dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u \varphi_t \, dx \, dt. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Posto $B(s) = \int_0^s A(t) \, dt$ l'equazione in (8.7) può essere riscritta come

$$u_t + (B(u))_x = 0$$

e quindi integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} \int_{[a,b] \times [0,T]} A(u)u_x \varphi \, dx \, dt &= \int_{[a,b] \times [0,T]} (B(u))_x \varphi \, dx \, dt = \int_0^T \left(\int_a^b (B(u))_x \varphi \, dx \right) dt \\ &= \int_0^T [B(u(b, t))\varphi(b, t) - B(u(a, t))\varphi(a, t)] dt - \int_0^T \left(\int_a^b B(u)\varphi_x \, dx \right) dt \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} B(u)\varphi_x \, dx \, dt. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Inserendo (8.17) e (8.18) in (8.16) si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (u\varphi_t + B(u)\varphi_x) dx \, dt + \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x, 0) \, dx = 0. \quad (8.19)$$

Possiamo dare la seguente

Definizione 8.1.3. *Date le funzioni $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ e $A \in C^0(\mathbb{R})$, si dice che una funzione $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ è soluzione **debole** del problema di Cauchy (8.7) se vale (8.19) per ogni funzione $\varphi \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ a supporto compatto in $\mathbb{R} \times [0, \infty)$.*

Per quanto mostrato sopra è chiaro che una soluzione classica di (8.7) è anche soluzione debole. Viceversa supponiamo che $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ sia una soluzione debole di (8.7). L'identità (8.19) vale, in particolare, per tutte le funzioni $\varphi \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ con $\text{supp}\varphi \subset \mathbb{R} \times (0, \infty)$. Procedendo come in (8.17) e (8.18) si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} [u_t + (B(u))_x] \varphi \, dx \, dt = 0.$$

Pertanto, dalla Proposizione 2.4.22 ne segue che

$$u_t + (B(u))_x = 0 \quad \text{q.o. in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \tag{8.20}$$

ed essendo u di classe C^1 , la precedente identità vale per ogni $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$. Sia ora $\varphi \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ a supporto compatto in $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ (quindi non necessariamente nulla sull'asse x). Integrando per parti come in (8.17) e (8.18) da (8.19) si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} [u_t + (B(u))_x] \varphi \, dx \, dt + \int_{\mathbb{R}} [u(x, 0) - g(x)] \varphi(x, 0) \, dx = 0$$

e tenendo conto di (8.20) si conclude che

$$\int_{\mathbb{R}} [u(x, 0) - g(x)] \varphi(x, 0) \, dx = 0$$

per ogni $\varphi \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ a supporto compatto in $\mathbb{R} \times [0, \infty)$. Dalla Proposizione 2.4.22 si ha che $u(x, 0) = g(x)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$ ed essendo u continua si ha $u(x, 0) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Abbiamo così dimostrato che u è una soluzione classica di (8.7). Per esistenza e unicità di una soluzione debole di (8.7) si veda il Teorema 8.1.9 alla fine di questo paragrafo.

Consideriamo ora una soluzione debole u di (8.7) e supponiamo che tale soluzione sia discontinua lungo un arco Γ di curva regolare di equazione $x = \eta(t)$. Analoghi risultati valgono per curve regolari in forma parametrica: $x = x(s)$, $t = t(s)$. Mostriamo che non tutte le discontinuità sono ammissibili. Supponiamo che u presenti una discontinuità di tipo salto lungo Γ , e cioè u sia regolare fuori da Γ e ammetta limite da “entrambe le parti” di Γ . Per essere più rigorosi, per ogni $(x_0, t_0) \in \Gamma$ sia $D \subset \mathbb{R} \times (0, \infty)$ un disco aperto centrato in (x_0, t_0) di raggio opportuno e siano

$$D_1 = \{(x, t) \in D : x < \eta(t)\}, \quad D_2 = \{(x, t) \in D : x > \eta(t)\}. \tag{8.21}$$

Si supponga che per ogni $(x, t) \in \Gamma \cap D$ esistano i seguenti limiti

$$u_-(x, t) := \lim_{(y, \tau) \rightarrow (x, t)} u|_{D_1}(y, \tau), \quad u_+(x, t) := \lim_{(y, \tau) \rightarrow (x, t)} u|_{D_2}(y, \tau).$$

Inoltre si supponga che $u \in C^1(\overline{D}_1)$ e $u \in C^1(\overline{D}_2)$ dove nel primo caso si intende che $u = u_-$ su $\Gamma \cap D$ mentre nel secondo $u = u_+$ su $\Gamma \cap D$.

Sia ora $\varphi \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ a supporto compatto in D . Allora da (8.19) si ha

$$0 = \int_D (u\varphi_t + B(u)\varphi_x) dx dt = \int_{D_1} (u\varphi_t + B(u)\varphi_x) dx dt + \int_{D_2} (u\varphi_t + B(u)\varphi_x) dx dt. \quad (8.22)$$

Poichè per $i = 1, 2$, $u \in C^1(\overline{D}_i)$ e risolve l'equazione $u_t + (B(u))_x = 0$ su D_i , si ha grazie alla formula di Green nel piano (si veda (6.16))

$$\int_{D_i} (u\varphi_t + B(u)\varphi_x) dx dt = \int_{D_i} [(u\varphi)_t + (B(u)\varphi)_x] dx dt = \int_{\partial^+ D_i} (-u\varphi dx + B(u)\varphi dt) \quad (8.23)$$

dove con $\partial^+ D_i$ si intende la frontiera di D_i percorsa in senso antiorario. Ma essendo $\varphi \equiv 0$ su ∂D quest'ultimo integrale di linea si riduce al solo integrale su Γ da cui

$$\int_{\partial^+ D_1} (-u\varphi dx + B(u)\varphi dt) = \int_{t_1}^{t_2} [-u_-(\eta(t), t)\eta'(t) + B(u_-(\eta(t), t))]\varphi(\eta(t), t) dt \quad (8.24)$$

e

$$\int_{\partial^+ D_2} (-u\varphi dx + B(u)\varphi dt) = \int_{t_1}^{t_2} [u_+(\eta(t), t)\eta'(t) - B(u_+(\eta(t), t))]\varphi(\eta(t), t) dt. \quad (8.25)$$

Da (8.22)-(8.25) si ha

$$\int_{t_1}^{t_2} \{[u(\eta(t), t)]\eta'(t) - [B(u(\eta(t), t))]\}\varphi(\eta(t), t) dt = 0$$

dove abbiamo posto $[u] = u_+ - u_-$ e $[B(u)] = B(u_+) - B(u_-)$ su Γ . Grazie all'arbitrarietà di φ e del punto $(x_0, t_0) \in \Gamma$ si conclude che

$$\eta' \cdot [u] = [B(u)] \quad \text{su } \Gamma. \quad (8.26)$$

La funzione η' viene detta **velocità della discontinuità** e l'equazione (8.26) **condizione di salto**. Possiamo quindi enunciare la seguente

Proposizione 8.1.4. *Siano $A, g \in C^1(\mathbb{R})$ e sia u una soluzione debole di (8.7). Siano Γ , η e D come sopra. Si supponga che $u \in C^1(D \setminus \Gamma)$ e che $u \notin C^0(D)$. Introdotti gli insiemi D_1, D_2 come in (8.21), supponiamo che siano ben definite le funzioni*

$$\begin{aligned} u_-(x, t) &:= \lim_{(y, \tau) \rightarrow (x, t)} u|_{D_1}(y, \tau) & \forall (x, t) \in \overline{D}_1, \\ u_+(x, t) &:= \lim_{(y, \tau) \rightarrow (x, t)} u|_{D_2}(y, \tau) & \forall (x, t) \in \overline{D}_2 \end{aligned}$$

e che $u_- \in C^1(\overline{D}_1)$, $u_+ \in C^1(\overline{D}_2)$. Se si pone

$$[u] = u_+ - u_-, \quad [B(u)] = B(u_+) - B(u_-)$$

su Γ , allora la funzione η soddisfa la (8.26).

Per meglio comprendere come possano esistere soluzioni discontinue di (8.7) proponiamo il seguente problema modello (con $A(u) = u$)

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (8.27)$$

Il tipo di non linearità presente nell'equazione (8.27) appare in modo naturale nelle equazioni della fluidodinamica, basti osservare la seconda equazione nel sistema (8.4). Vediamo alcuni esempi (essenzialmente presi da [65]) di condizioni iniziali per il problema (8.27) che portano rispettivamente alla comparsa delle onde d'urto e al fenomeno ad esso opposto detto delle **onde di rarefazione**. In questo ultimo caso le caratteristiche si allontanano l'una dall'altra al crescere di t e ammettono dei punti di intersezione solo per $t < 0$.

Iniziamo con un esempio che evidenzia le onde d'urto.

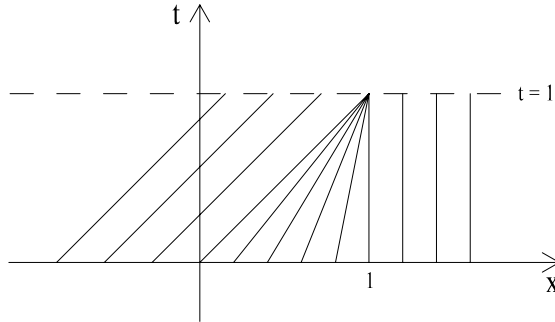
Esempio 8.1.5. Si consideri il problema (8.27) con

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ 1 - x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Per la (8.9), le equazioni cartesiane delle caratteristiche passanti per $(x_0, 0)$ sono

$$\begin{cases} x = x_0 + t & \text{se } x_0 < 0 \\ x = x_0 + (1 - x_0)t & \text{se } 0 \leq x_0 \leq 1 \\ x = x_0 & \text{se } x_0 > 1. \end{cases}$$

Si osserva facilmente che per $0 < t < 1$ non vi sono punti di intersezione tra le caratteristiche come mostrato nella figura successiva.



Curve caratteristiche dell'Esempio 8.1.5

Pertanto, per $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1)$ si ha

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < t \\ \frac{1-x}{1-t} & \text{se } t \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x > 1. \end{cases} \quad (8.28)$$

La funzione u così definita è continua in $\mathbb{R} \times [0, 1)$. È possibile definire u anche per $t \geq 1$ pur di ammettere che u possa presentare discontinuità di tipo salto. Se $x = \eta(t)$ è l'equazione cartesiana della curva lungo cui u presenta una discontinuità di tipo salto allora deve essere

$$u(x, t) = \begin{cases} u_-(x, t) = 1 & \text{se } x < \eta(t) \\ u_+(x, t) = 0 & \text{se } x > \eta(t). \end{cases}$$

Di conseguenza si ha che $[u] = u_+ - u_- = -1$ e $[\frac{1}{2}u^2] = \frac{1}{2}(u_+^2 - u_-^2) = -\frac{1}{2}$ e dall'equazione (8.26) si ottiene $\eta'(t) = \frac{1}{2}$. Quest'ultima implica $\eta(t) = \frac{1}{2}t + C$ con $C \in \mathbb{R}$ da determinarsi. D'altra parte, mediante un prolungamento per continuità, grazie a (8.28) possiamo definire

$$u(x, 1) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 1 \\ 0 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

e quindi la curva di equazione $x = \eta(t)$ deve passare per il punto $(1, 1)$. Pertanto deve essere

$$\eta(t) = \frac{1}{2}(t + 1) \quad \forall t \geq 1.$$

In conclusione per $(x, t) \in \mathbb{R} \times [1, \infty)$ si ha

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < \frac{1}{2}(t + 1) \\ 0 & \text{se } x > \frac{1}{2}(t + 1), \end{cases}$$

che è una funzione discontinua. □

Passiamo ora ad un esempio che presenta onde di rarefazione.

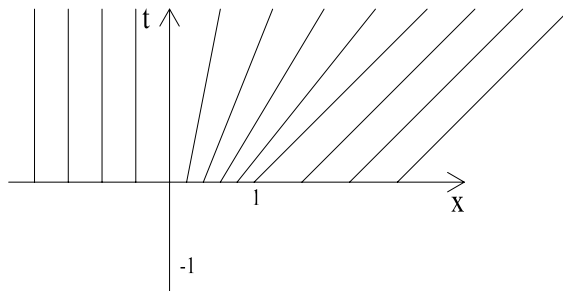
Esempio 8.1.6. Si consideri il problema (8.27) con

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Per la (8.9), le caratteristiche per $(x_0, 0)$ al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$ sono

$$\begin{cases} x = x_0 & \text{se } x_0 < 0 \\ x = x_0 + x_0 t & \text{se } 0 \leq x_0 \leq 1 \\ x = x_0 + t & \text{se } x_0 > 1. \end{cases}$$

Come si può vedere dalla figura sottostante le curve caratteristiche si “allontanano” le une dalle altre al crescere di t .



Curve caratteristiche dell'Esempio 8.1.6

La soluzione u del problema di Cauchy è continua su tutto il semipiano $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ ed è data da

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{x}{1+t} & \text{se } 0 \leq x \leq t + 1 \\ 1 & \text{se } x > t + 1. \end{cases}$$

L'eventuale discontinuità sarebbe per $t = -1 < 0$. □

Il prossimo esempio mostra come un problema di Cauchy con un dato iniziale discontinuo possa ammettere una soluzione continua per $t > 0$ e che possono esistere anche più soluzioni dello stesso problema.

Esempio 8.1.7. Si consideri il problema (8.27) con

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Cerchiamo una soluzione u_1 che presenti una discontinuità lungo una curva di equazione $x = \eta(t)$ e tale che

$$u_1(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \eta(t) \\ 1 & \text{se } x > \eta(t). \end{cases}$$

Da (8.26) si deduce che deve essere $\eta'(t) = \frac{1}{2}$ e quindi $\eta(t) = \frac{1}{2}t$.

Ma si può verificare facilmente che anche la funzione

$$u_2(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{x}{t} & \text{se } 0 \leq x \leq t \\ 1 & \text{se } x > t \end{cases}$$

è una soluzione del problema di Cauchy ed è pure continua in $\mathbb{R} \times (0, \infty)$. □

Il precedente esempio ha mostrato che l'unicità della soluzione debole di (8.7) può venire a mancare. Viene spontaneo chiedersi quali soluzioni deboli siano fisicamente rilevanti. Per rispondere a questa domanda supponiamo che $A, g \in C^1(\mathbb{R})$, che $\inf_{\mathbb{R}} A' > 0$ e che $g' > 0$ in \mathbb{R} . In modo del tutto analogo si può procedere nel caso in cui $A' < 0$ e $g' < 0$.

Grazie al Corollario 8.1.2 possiamo affermare che (8.7) ammette un'unica soluzione classica $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ e da (8.15) si ha

$$u_x = \frac{g'(\xi)}{1 + A'(u)g'(\xi)t} \leq \frac{1}{tA'(u)} \leq \frac{E}{t}$$

dove si è posto $E = \frac{1}{\inf_{\mathbb{R}} A'} \in (0, \infty)$. Per il Teorema di Lagrange si ottiene

$$u(x+a, t) - u(x, t) \leq \frac{E}{t} a \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall a > 0, \forall t > 0. \quad (8.29)$$

Possiamo dare la seguente

Definizione 8.1.8. Siano $A \in C^1(\mathbb{R})$, $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ e si supponga che $A' > 0$ in \mathbb{R} . Si dice che una soluzione debole u di (8.7) soddisfa la **condizione di entropia** se per ogni $x \in \mathbb{R}$, per ogni $a > 0$ e per ogni $t > 0$ vale la disuguaglianza (8.29).

Tornando all'Esempio 8.1.7 si osserva facilmente tra le due soluzioni trovate soltanto la u_2 soddisfa la condizione di entropia. Basta infatti scegliere $x = \frac{t}{2} - 1$ e $a = 2$ in (8.29) per vedere che

$$u_2 \left(\frac{t}{2} + 1, t \right) - u_2 \left(\frac{t}{2} - 1, t \right) = 1 \quad \forall t > 0.$$

L'Esempio 8.1.7 suggerisce che il problema (8.7) pur non ammettendo un'unica soluzione, potrebbe però ammetterne una sola soddisfacente la condizione di entropia. Vale infatti il seguente risultato di esistenza e unicità.

Teorema 8.1.9. Siano $A \in C^1(\mathbb{R})$, $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ e si supponga che $A' > 0$ in \mathbb{R} . Allora (8.7) ammette un'unica soluzione debole soddisfacente la condizione di entropia.

Per la dimostrazione di questo risultato si veda [65, Chapter 16].

8.1.3 Problema di Cauchy per equazioni più generali

Il problema (8.7) è un particolare caso di problema di Cauchy associato ad una equazione quasilineare del prim'ordine. Come già spiegato nel Paragrafo 3.3, si possono considerare problemi più generali della forma

$$\begin{cases} F(\nabla u(x), u(x), x) = 0 & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u(x) = g(x) & x \in \Gamma \end{cases} \quad (8.30)$$

dove $F : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione lineare nelle prime n variabili, Ω è un dominio aperto e Γ una superficie $(n - 1)$ -dimensionale contenuta in Ω . Come nel Paragrafo 3.3 per il caso lineare, anche per il problema (8.30), che è una generalizzazione di (3.8)-(3.9), possono venire a mancare sia l'esistenza che l'unicità della soluzione.

Tratteremo in questo paragrafo problemi di Cauchy in dimensione $n = 2$ della forma

$$\begin{cases} a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \Gamma \end{cases} \quad (8.31)$$

dove Γ è la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \varphi(s) \\ y = \psi(s) \end{cases} \quad (s \in I)$$

e I è un intervallo di \mathbb{R} . La condizione $u = g$ su Γ va letta come

$$u(\varphi(s), \psi(s)) = h(s) := g(\varphi(s), \psi(s)) \quad \forall s \in I. \quad (8.32)$$

Si supponrà che le funzioni a, b, c e φ, ψ, h siano di classe C^1 nei rispettivi insiemi di definizione.

Analogamente al caso lineare chiameremo **curve caratteristiche** le curve in \mathbb{R}^3 soluzioni del sistema di equazioni ordinarie

$$\begin{cases} x' = a(x, y, z) \\ y' = b(x, y, z) \\ z' = c(x, y, z). \end{cases} \quad (8.33)$$

Come le caratteristiche definite in (3.14) per il problema (3.12), anche le caratteristiche definite da (8.33) sono tangenti in ogni punto al grafico della soluzione di (8.31).

Supponiamo che $0 \in I$ e si ponga $(x_0, y_0, z_0) = (\varphi(0), \psi(0), h(0))$. Possiamo concludere enunciando il seguente

Teorema 8.1.10. *Siano a, b, c funzioni di classe C^1 in un intorno del punto (x_0, y_0, z_0) e φ, ψ, h di classe C^1 in un intorno di $s = 0$. Se*

$$J := b(x_0, y_0, z_0)\varphi'(0) - a(x_0, y_0, z_0)\psi'(0) \neq 0 \quad (8.34)$$

allora esiste un intorno U di (x_0, y_0) tale che il problema (8.31) ammette un'unica soluzione di classe C^1 definita in U .

Per la dimostrazione si veda il Paragrafo 1.5 in [40].

8.2 Equazioni di Navier-Stokes

8.2.1 Descrizione del modello fisico

Le equazioni di Navier-Stokes descrivono il moto di un fluido viscoso incompressibile nello spazio \mathbb{R}^n . Riprendiamo in considerazione l'equazione (3.80) e supponiamo che in luogo della gravità \mathbf{g} agisca una generica forza per unità di volume \mathbf{f} ; allora, detta p la pressione del fluido e \mathbf{v} la velocità del fluido, l'equazione (3.80) diventa

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{f}$$

e, utilizzando la (3.50), si ottiene

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\mathbf{f}}{\rho}. \quad (8.35)$$

Questa è l'equazione che regola il moto di un fluido non viscoso. Ci proponiamo ora di ottenere l'equazione per un fluido viscoso. Utilizzando l'equazione di continuità (3.46) e la (8.35) si ha

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathbf{v} = -\nabla p - \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \mathbf{v} + \mathbf{f}$$

che, scritta scalarmente, diventa

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) + f_i = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} + f_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (8.36)$$

dove Π è il tensore di componenti $\Pi_{ij} = p\delta_{ij} + \rho v_i v_j$ (con $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$). Il significato fisico del tensore Π sarà chiaro tra poco.

Si consideri la parte di fluido che scorre in un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ fissato; da (8.36) si ricava

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \, dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \Pi \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{f} \, dx$$

e, per il Teorema della divergenza, si deduce

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \, dx = - \int_{\partial \Omega} \Pi \nu \, dS + \int_{\Omega} \mathbf{f} \, dx.$$

Abbiamo ottenuto una legge di bilancio della quantità di moto in cui il tensore Π misura il flusso della quantità di moto che passa attraverso la superficie $\partial \Omega$ nell'unità di tempo. Nel caso di un fluido viscoso è necessario aggiungere nel tensore Π un nuovo termine che, concordemente a [43], indicheremo con $-\sigma'_{ij}$. Il tensore Π diventa così

$$\Pi_{ij} = p\delta_{ij} + \rho v_i v_j - \sigma'_{ij} = -\sigma_{ij} + \rho v_i v_j$$

dove si è posto $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$. Il tensore σ_{ij} viene detto **tensore di stress** e σ'_{ij} **tensore di stress viscoso**. I processi di attrito interno dovuti alla viscosità del fluido avvengono quando porzioni di fluido si muovono con velocità diverse in modo da creare una sorta di scorrimento tra i vari filetti fluidi gli uni sugli altri. Dal punto di vista matematico, questo si traduce in una dipendenza di σ'_{ij} dalle sole derivate spaziali della velocità \mathbf{v} . In presenza di gradienti della velocità piccoli si può supporre che il tensore di stress viscoso dipenda soltanto dalle derivate prime di \mathbf{v} . Si osservi che nel caso in cui il fluido sia in rotazione uniforme come nell'Esempio 3.4.5, si ha

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = 0.$$

Imponendo che il tensore σ'_{ij} si annulli in questa situazione dobbiamo ipotizzare che esso contenga queste combinazioni simmetriche delle derivate di \mathbf{v} . Supporremo che σ'_{ij} sia della forma

$$\sigma'_{ij} = a \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + b(\operatorname{div} \mathbf{v}) \delta_{ij}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ indipendenti da \mathbf{v} , o della forma più particolare

$$\sigma'_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}(\operatorname{div} \mathbf{v})\delta_{ij} \right) + \zeta(\operatorname{div} \mathbf{v})\delta_{ij}. \quad (8.37)$$

I coefficienti η e ζ prendono rispettivamente il nome di **coefficiente di viscosità dinamica** e **seconda viscosità** e hanno la proprietà di essere entrambi positivi; sono indipendenti dalla velocità del fluido, ma dipendono solo dalla pressione e dalla temperatura. In molti casi, comunque, η e ζ non variano il loro valore in modo apprezzabile e quindi possono essere considerati costanti, si veda [43]. Per ottenere l'equazione del moto non resta che inserire la (8.37) nell'equazione (8.36) che può essere riscritta come

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} = -\operatorname{div} \Pi + \mathbf{f}.$$

Dopo qualche calcolo si ottiene

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} - \eta \Delta \mathbf{v} + \nabla p + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \mathbf{v} - \left(\frac{1}{3} \eta + \zeta \right) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{v}) = \mathbf{f}. \quad (8.38)$$

Nel caso in cui la densità ρ del fluido sia costante (fluido incomprimibile), dall'equazione di continuità (3.46) si ottiene $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, che sostituita in (8.38), fornisce l'equazione di Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{\mathbf{f}}{\rho}. \quad (8.39)$$

Dato che non cambia la natura dell'equazione, nel seguito supporremo che $\rho = 1$ in un'opportuna unità di misura. Indicheremo poi con u la generica soluzione dell'equazione di Navier-Stokes (8.39) e indicheremo la divergenza di una funzione vettoriale w con $\nabla \cdot w$.

8.2.2 Equazione stazionaria

Formulazione variazionale

In questo paragrafo studiamo il problema stazionario

$$\begin{cases} -\eta \Delta u + \nabla p + (u \cdot \nabla) u = f & \text{in } \Omega \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial \Omega \end{cases} \quad (8.40)$$

dove le incognite sono funzioni vettoriali u (velocità) e la funzione scalare p (pressione) e Ω è un dominio aperto e limitato di \mathbb{R}^n ($2 \leq n \leq 4$) con bordo $\partial \Omega$ di classe C^2 . Rispetto a (7.16), la (8.40) possiede in aggiunta il termine $(u \cdot \nabla) u$ ed è pertanto

un'equazione ellittica *quasilineare*. Questo termine nonlineare merita un'attenzione particolare. Consideriamo gli spazi \mathbf{G}_i e \mathbf{V} introdotti nel Paragrafo 7.1.4 e dimostriamo prima un risultato che spiega il motivo per il quale abbiamo bisogno della restrizione $2 \leq n \leq 4$ sulla dimensione dello spazio:

Lemma 8.2.1. *Supponiamo che $u \in \mathbf{V}$, allora $(u \cdot \nabla)u \in \mathbf{H}^{-1}$.*

Dimostrazione. Dal Teorema 6.2.21 deduciamo che

– se $n = 2$, $\mathbf{H}^1 \subset \mathbf{L}^q$ per ogni $q < \infty$ così che $(u \cdot \nabla)u \in \mathbf{L}^r$ per ogni $r < 2$ e quindi $(u \cdot \nabla)u \in \mathbf{H}^{-1}$;

– se $n = 3$, $\mathbf{H}^1 \subset \mathbf{L}^6$ così che $(u \cdot \nabla)u \in \mathbf{L}^{3/2} \subset \mathbf{L}^{6/5} \subset \mathbf{H}^{-1}$;

– se $n = 4$, $\mathbf{H}^1 \subset \mathbf{L}^4$ così che $(u \cdot \nabla)u \in \mathbf{L}^{4/3} \subset \mathbf{H}^{-1}$.

Per le sopra citate inclusioni abbiamo utilizzato l'implicazione banale $\mathbf{H}_0^1 \subset \mathbf{L}^q \Rightarrow \mathbf{L}^{q'} \subset \mathbf{H}^{-1}$. □

In seguito, dimostriamo il

Lemma 8.2.2. *L'applicazione trilineare $b : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da*

$$b(u, v, w) := \int_{\Omega} (u \cdot \nabla)v \cdot w = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j$$

ha le seguenti proprietà:

(i) è continua su $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \times \mathbf{V}$;

(ii) per ogni $u, v, w \in \mathbf{V}$ abbiamo $b(u, v, v) = 0$ e $b(u, v, w) = -b(u, w, v)$;

(iii) se $\{u^m\} \subset \mathbf{V}$ è tale che $u^m \rightarrow u$ in \mathbf{V} , allora $b(u^m, u^m, v) \rightarrow b(u, u, v)$ per ogni $v \in \mathbf{V}$.

Dimostrazione. (i) Poichè $2 \leq n \leq 4$, per il Teorema 6.2.21 abbiamo l'immersione $\mathbf{V} \subset \mathbf{L}^4$. Pertanto, dalla disuguaglianza di Hölder (2.17)

$$|b(u, v, w) - b(u', v, w)| \leq \int_{\Omega} |u - u'| \cdot |\nabla v| \cdot |w|$$

$$\leq \|u - u'\|_{\mathbf{L}^4} \cdot \|\nabla v\|_{\mathbf{L}^2} \cdot \|w\|_{\mathbf{L}^4} \leq c_n \|u - u'\|_{\mathbf{V}} \cdot \|v\|_{\mathbf{V}} \cdot \|w\|_{\mathbf{V}},$$

dove la costante c_n dipende solo dalla dimensione e dal dominio Ω ; è la costante per l'immersione $\mathbf{V} \subset \mathbf{L}^4$ (in realtà, c_4 è indipendente da $\Omega \subset \mathbb{R}^4$). La precedente stima dimostra che $b(u_k, v, w) \rightarrow b(u, v, w)$ se $u_k \rightarrow u$ in \mathbf{V} . Per completare la dimostrazione di (i) possiamo procedere in modo simile per v e w .

(ii) Dall'enunciato (i) e per densità, per dimostrare la prima proprietà possiamo supporre $u, v \in (\mathbf{V} \cap \mathcal{D})$. Per tali u, v , con un'integrazione per parti si ottiene

$$\int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} v_j = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j^2}{\partial x_i} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} v_j^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

così che, sommando su i ,

$$b(u, v, v) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} (\nabla \cdot u) v_j^2 = 0$$

essendo $\nabla \cdot u = 0$. La seconda proprietà è una conseguenza della prima una volta sostituita v con $v + w$.

(iii) Prendiamo prima $v \in \mathbf{V} \cap \mathcal{D}$. Dall'enunciato (ii) sappiamo che

$$b(u^m, u^m, v) = -b(u^m, v, u^m) = - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i^m \frac{\partial v_j}{\partial x_i} u_j^m.$$

Poichè $\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \in L^\infty$ e $u_i^m \rightarrow u_i$ in L^2 per ogni i , il risultato segue per ogni $v \in \mathbf{V} \cap \mathcal{D}$. Per una generica $v \in \mathbf{V}$, si utilizza un argomento di densità. \square

Osservazione 8.2.3. Il Lemma 8.2.2 (i) afferma che se $u^m \rightarrow u$ in \mathbf{V} , $v^m \rightarrow v$ in \mathbf{V} e $w^m \rightarrow w$ in \mathbf{V} , allora $b(u^m, v^m, w^m) \rightarrow b(u, v, w)$. Il Lemma 8.2.2 (iii) *non* afferma che se $u^m \rightarrow u$ in \mathbf{V} e $v^m \rightarrow v$ in \mathbf{V} , allora $b(u^m, v^m, w) \rightarrow b(u, v, w)$. \square

Una volta dimostrate queste proprietà, possiamo dare la *formulazione variazionale* di (8.40): per $f \in \mathbf{L}^2$, si determini $u \in \mathbf{V}$ tale che

$$\eta \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v + b(u, u, v) = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in \mathbf{V}. \quad (8.41)$$

Dal Teorema 7.1.16 si vede che se moltiplichiamo (8.40) per $v \in \mathbf{V} \subset \mathbf{G}_1$ e integriamo, allora il termine contenente ∇p si annulla e pertanto una soluzione $u \in \mathbf{V}$ soddisfa (8.41). Viceversa, se $u \in \mathbf{V}$ soddisfa (8.41), allora

$$\langle -\eta \Delta u + (u \cdot \nabla)u - f, v \rangle = 0 \quad \forall v \in \mathbf{V} \quad (8.42)$$

con $\Delta u \in \mathbf{H}^{-1}$, si veda la Proposizione 6.2.19. Inoltre, dal Lemma 8.2.1, anche $(u \cdot \nabla)u \in \mathbf{H}^{-1}$. Pertanto, tutti i termini testati con v in (8.42) appartengono a \mathbf{H}^{-1} .

Mostriamo ora che se è possibile risolvere (8.41), allora è anche possibile risolvere (8.40). A questo scopo, utilizziamo il seguente risultato:

Proposizione 8.2.4. *Sia $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbf{H}^{-1}$ un campo vettoriale. Una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di $p \in L^2$ tale che $\nabla p = q$ è che $\langle q, v \rangle = 0$ per ogni $v \in \mathbf{V}$.*

Dimostrazione. Si veda [67], Proposizioni I.1.1 e I.1.2. \square

Combinando (8.42) con la Proposizione 8.2.4, si vede che esiste $p \in L^2$ tale che $-\eta \Delta u + (u \cdot \nabla)u - f = -\nabla p$ in \mathbf{H}^{-1} , e cioè $\langle -\eta \Delta u + \nabla p + (u \cdot \nabla)u - f, v \rangle = 0$ per ogni $v \in \mathbf{H}_0^1$. Abbiamo così dimostrato che la risoluzione di (8.40) può essere ridotta alla risoluzione di (8.41) che è discussa qui di seguito.

Osservazione 8.2.5. È chiaro che dai sopra citati risultati, la formulazione debole è ancora valida se $f \in \mathbf{H}^{-1}$. Qui, ci limitiamo al caso $f \in \mathbf{L}^2$ perchè vogliamo evidenziare il ruolo della scomposizione di Helmholtz-Weyl (Teorema 7.1.16). \square

Esistenza di una soluzione

Dimostriamo qui il seguente

Teorema 8.2.6. *Per ogni $f \in \mathbf{L}^2$ esiste $u \in \mathbf{V}$ tale che vale (8.41). Inoltre, esiste $p \in L^2$ tale che (8.40) vale nel senso di \mathbf{H}^{-1} .*

Dimostrazione. Per quanto visto in precedenza, dobbiamo soltanto dimostrare l'esistenza di u . All'uopo, seguiamo [67] e utilizziamo il metodo di Galerkin, cfr. Paragrafo 6.8. Consideriamo la successione $\{e_m\} \subset \mathbf{V} \cap \mathbf{C}^\infty$ di autovettori dell'operatore di Stokes, si veda il Teorema 7.1.21. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ definiamo una soluzione approssimata $u^m \in \mathbf{V}_m := \text{span}\{e_1, \dots, e_m\}$ di (8.41) data da

$$u^m = \sum_{i=1}^m \xi_{i,m} e_i, \quad \xi_{i,m} \in \mathbb{R},$$

$$\eta \int_{\Omega} \nabla u^m : \nabla e_i + b(u^m, u^m, e_i) = \int_{\Omega} f e_i \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (8.43)$$

L'esistenza di una soluzione u^m di (8.43) segue dal seguente enunciato:

Lemma 8.2.7. *Sia X uno spazio di Hilbert finito dimensionale con prodotto scalare $[\cdot, \cdot]$ e norma $\|\cdot\|$. Sia $P : X \rightarrow X$ una funzione continua tale che $[P(x), x] > 0$ per ogni $\|x\| = k > 0$. Allora, esiste $x \in X$ tale che $\|x\| \leq k$ e $P(x) = 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che P non abbia zeri in $B := \{x \in X; \|x\| \leq k\}$. Allora, possiamo definire l'applicazione continua $S : B \rightarrow B$ data da

$$S(x) = -k \frac{P(x)}{\|P(x)\|}.$$

Dal Teorema del punto fisso di Brouwer [77, Proposition 2.6], sappiamo che S possiede un punto fisso in $x_0 \in B$, e cioè

$$x_0 = -k \frac{P(x_0)}{\|P(x_0)\|}.$$

In particolare, $\|x_0\| = k$ così che se consideriamo il prodotto scalare con x_0 di ambo i membri della precedente equazione si ottiene

$$k^2 = -k \frac{[P(x_0), x_0]}{\|P(x_0)\|}$$

che contraddice l'ipotesi iniziale che $[P(x), x] > 0$ se $\|x\| = k$. \square

Applichiamo il Lemma 8.2.7 nel modo seguente. Sia $X = \mathbf{V}_m$ con $[u, v] = \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v$ e sia $P = P_m$ implicitamente definita da

$$[P(u), v] = \eta[u, v] + b(u, u, v) - \int_{\Omega} f v \quad \forall u, v \in X .$$

La continuità di P segue dal Lemma 8.2.2 (i). Inoltre, dal Lemma 8.2.2 (ii) si ha che

$$[P(u), u] = \eta\|u\|_{\mathbf{V}}^2 - \int_{\Omega} f u \geq \eta\|u\|_{\mathbf{V}}^2 - \|f\|_{\mathbf{L}^2}\|u\|_{\mathbf{L}^2} \geq \|u\|_{\mathbf{V}}(\eta\|u\|_{\mathbf{V}} - c\|f\|_{\mathbf{L}^2})$$

dove c è la costante proveniente dalla disuguaglianza di Poincaré ($\|v\|_{\mathbf{L}^2} \leq c\|v\|_{\mathbf{V}}$ per ogni $v \in X \subset \mathbf{V}$, si veda il Teorema 6.2.18). Pertanto, se $\|u\|_{\mathbf{V}} = k$ con k sufficientemente grande, allora $[P(u), u] > 0$. Le ipotesi del Lemma 8.2.7 sono così soddisfatte e se ne deduce che *esiste una soluzione u^m di (8.43)*. Poichè (8.43) vale per ogni e_i vale anche per ogni combinazione lineare degli e_i . Scegliamo come funzione test proprio la soluzione u^m . Ancora per le disuguaglianze di Hölder e Poincaré, si trova

$$\eta\|u^m\|_{\mathbf{V}}^2 = \int_{\Omega} f u^m \leq \|u^m\|_{\mathbf{L}^2} \cdot \|f\|_{\mathbf{L}^2} \leq c\|u^m\|_{\mathbf{V}} \cdot \|f\|_{\mathbf{L}^2}$$

così che la successione $\{u^m\}$ è limitata in \mathbf{V} e, a meno di una sottosuccessione, $u^m \rightharpoonup u$ in \mathbf{V} per il Teorema 1.4.13. Per ogni $\ell \in \mathbb{N}$, si scelga $v \in \mathbf{V}_{\ell} \subset \mathbf{V}$ e $m \geq \ell$; applicando il Lemma 8.2.2 (iii), si ottiene

$$0 = \eta \int_{\Omega} \nabla u^m : \nabla v + b(u^m, u^m, v) - \int_{\Omega} f v \rightarrow \eta \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v + b(u, u, v) - \int_{\Omega} f v$$

e cioè che $u \in \mathbf{V}$ è una soluzione di (8.41). Questo completa la dimostrazione del Teorema 8.2.6. \square

Regolarità della soluzione

Nel Teorema 8.2.6 abbiamo supposto che $f \in \mathbf{L}^2$. Dalla regolarità ellittica, ci si aspetterebbe allora che la soluzione $u \in \mathbf{V}$ di (8.41) appartenga a \mathbf{H}^2 ; discutiamo qui questo problema. All'uopo è necessario richiamare la seguente immersione di Sobolev [1] che è un'estensione del Teorema 6.6.1:

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall r \geq 1 \quad \mathbf{W}^{m,r} \subset \begin{cases} \mathbf{L}^q \text{ per ogni } 1 \leq q \leq \frac{nr}{n-mr} & \text{se } mr < n \\ \mathbf{L}^q \text{ per ogni } 1 \leq q < \infty & \text{se } mr = n \\ \mathbf{L}^{\infty} & \text{se } mr > n \end{cases}, \quad (8.44)$$

dove $\mathbf{W}^{m,r}$ indica lo spazio di Sobolev delle funzioni con derivate generalizzate fino all'ordine m in L^r (non necessariamente $r = 2$).

Sfruttiamo ora i risultati di regolarità per (7.16), si veda la Proposizione 7.1.26. Prima di tutto, si riscriva (8.40) come

$$\begin{cases} -\eta\Delta u + \nabla p = f - (u \cdot \nabla)u & \text{in } \Omega \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (8.45)$$

così che la regolarità della soluzione di (8.40) dipende sulla nuova funzione $g := f - (u \cdot \nabla)u$. Dalla dimostrazione del Lemma 8.2.1 sappiamo che

$$(u \cdot \nabla)u \in \begin{cases} \mathbf{L}^r \text{ per ogni } r < 2 & \text{se } n = 2 \\ \mathbf{L}^{3/2} & \text{se } n = 3 \\ \mathbf{L}^{4/3} & \text{se } n = 4. \end{cases}$$

Pertanto, se supponiamo che $f \in \mathbf{L}^2$, si ha

$$g \in \begin{cases} \mathbf{L}^r \text{ per ogni } r < 2 & \text{se } n = 2 \\ \mathbf{L}^{3/2} & \text{se } n = 3 \\ \mathbf{L}^{4/3} & \text{se } n = 4. \end{cases}$$

Poichè u risolve (8.45), applicando la Proposizione 7.1.26, deduciamo che

$$u \in \begin{cases} \mathbf{W}^{2,r} \text{ per ogni } r < 2 & \text{se } n = 2 \\ \mathbf{W}^{2,3/2} & \text{se } n = 3 \\ \mathbf{W}^{2,4/3} & \text{se } n = 4. \end{cases}$$

Se $n = 2$, da $u \in \mathbf{W}^{2,3/2}$ grazie a (8.44) si deduce che $u \in \mathbf{L}^\infty$ così che $(u \cdot \nabla)u \in \mathbf{L}^2$. Pertanto, $g \in \mathbf{L}^2$ e $u \in \mathbf{H}^2$ grazie alla Proposizione 7.1.26.

Se $n = 3$, da $u \in \mathbf{W}^{2,3/2}$ prima si ottiene che $u \in \mathbf{L}^r$ per ogni $r \in [1, \infty)$ e poi che $\nabla u \in \mathbf{W}^{1,3/2} \subset \mathbf{L}^3$ (in quest'ultima $\mathbf{W}^{1,3/2}$ indica uno spazio di Sobolev di funzioni a valori matriciali essendo ∇u la matrice jacobiana di u); di conseguenza, $(u \cdot \nabla)u \in \mathbf{L}^q$ per ogni $q \in [1, 3)$. Quindi, $g \in \mathbf{L}^2$ e abbiamo ancora $u \in \mathbf{H}^2$.

Se $n = 4$, da $u \in \mathbf{W}^{2,4/3}$ abbiamo che $u \in \mathbf{L}^4$ e che $\nabla u \in \mathbf{W}^{1,4/3} \subset \mathbf{L}^2$ e non vi è alcun miglioramento rispetto al già noto $u \in \mathbf{V}$; quindi, in questo caso non si raggiunge la regolarità \mathbf{H}^2 con questo semplice trucco. In dimensione $n = 4$ sono

comunque validi risultati di regolarità ma sono ottenuti con strumenti più sofisticati, si veda [33].

Ulteriore regolarità della soluzione (per funzioni f più regolari) può essere ottenuta in modo simile.

Osservazione 8.2.8. La teoria finora sviluppata per (8.40) si applica anche a problemi più generali.

– Si possono considerare problemi di Dirichlet *non omogenei* per (8.40) sostituendo la condizione al bordo con $u = \varphi$ su $\partial\Omega$, si veda [67, Section II.1.4].

– Si può considerare lo stesso problema (8.40) ma su domini *illimitati*; qui sorgono alcuni problemi di immersione e la formulazione variazionale cambia drasticamente, si veda [67, Section II.1.3]. \square

Struttura dell'insieme delle soluzioni

Il Teorema 8.2.6 nulla dice sull'unicità della soluzione di (8.41); affrontiamo ora questo problema. Per ogni $f \in \mathbf{L}^2$ indichiamo con

$$S_f = \text{l'insieme delle soluzioni deboli di (8.41)}.$$

Sia P_1 la proiezione su \mathbf{G}_1 introdotta nel Teorema 7.1.16. Dimostriamo che si ha unicità a condizione che f sia sufficientemente piccola in un senso opportuno:

Teorema 8.2.9. *Esiste $\gamma > 0$ tale che se $\|P_1 f\|_{\mathbf{L}^2} < \gamma$, allora la soluzione di (8.41) è unica.*

Dimostrazione. Sia $f \in \mathbf{L}^2$ e si prenda $u \in S_f$. Scegliendo $u = v$ in (8.41) e utilizzando la disuguaglianza di Poincaré (Teorema 6.2.18) otteniamo

$$\eta \|u\|_{\mathbf{V}}^2 = \int_{\Omega} f u = \int_{\Omega} P_1 f u \leq \|P_1 f\|_{\mathbf{L}^2} \cdot \|u\|_{\mathbf{L}^2} \leq c \|P_1 f\|_{\mathbf{L}^2} \cdot \|u\|_{\mathbf{V}},$$

dove abbiamo utilizzato anche il Lemma 8.2.2, il Teorema 7.1.16 e la disuguaglianza di Hölder (2.17). Pertanto, esiste $c_1 > 0$ tale che ogni $u \in S_f$ soddisfi la stima a priori

$$\|u\|_{\mathbf{V}} \leq c_1 \|P_1 f\|_{\mathbf{L}^2} \quad \forall u \in S_f. \quad (8.46)$$

Supponiamo che (8.41) ammetta due soluzioni distinte u^1 e u^2 . Si ponga $w = u^1 - u^2 \neq 0$; sottraendo le equazioni (8.41) corrispondenti a u^1 e u^2 , si ottiene

$$\eta \int_{\Omega} \nabla w : \nabla v + b(u^1, w, v) + b(w, u^2, v) = 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}.$$

Si scelga $v = w$ nell'ultima equazione e si applichi il Lemma 8.2.2 (ii) per ottenere

$$\eta \|w\|_{\mathbf{V}}^2 = -b(w, u^2, w) \leq c(n) \|w\|_{\mathbf{V}}^2 \cdot \|u^2\|_{\mathbf{V}}.$$

Poichè $w \neq 0$, questo mostra che $\|u^2\|_{\mathbf{V}} \geq \eta/c(n)$. Per la (8.46) questo mostra che $\|P_1 f\|_{\mathbf{L}^2} \geq \eta/(c_1 c(n)) =: \gamma$. Abbiamo così dimostrato che se (8.41) ammette due soluzioni distinte, allora si ha necessariamente $\|P_1 f\|_{\mathbf{L}^2} \geq \gamma$. Questo dimostra il teorema. \square

In particolare, Il Teorema 8.2.9 afferma che se $P_1 f = 0$, allora $u = 0$. Quest'ultimo è simile all'enunciato nel caso lineare, si veda il Corollario 7.1.20.

Se l'ipotesi che $P_1 f$ sia "piccola" viene violata, nulla si può dire in generale. Comunque, un profondo risultato di Foias-Temam [22] suggerisce che non ci sono "troppe soluzioni" se la dimensione dello spazio è $n = 2$ o $n = 3$ (cioè le dimensioni "fisiche"). Questa restrizione sulla dimensione ($n = 4$ non è ammissibile) non è soltanto dovuta al discorso di regolarità discusso prima ma è anche una conseguenza della prossima disuguaglianza dovuta a Gagliardo [26] e Nirenberg [53]:

$$\|v\|_{\mathbf{L}^4} \leq c \|v\|_{\mathbf{L}^2}^{1-n/4} \cdot \|\nabla v\|_{\mathbf{L}^2}^{n/4} \quad \forall v \in \mathbf{H}_0^1; \quad (8.47)$$

chiaramente, se $n = 4$ la (8.47) si riduce all'immersione di Sobolev, cfr. Teorema 6.2.20. Vale il:

Teorema 8.2.10. (di Foias-Temam). *Supponiamo che $n = 2, 3$ e che $\partial\Omega$ abbia un numero finito di componenti connesse. Sia $f \in \mathbf{L}^2$, allora S_f è omeomorfo a un insieme compatto di \mathbb{R}^m per un opportuno m . Inoltre, esiste un insieme aperto e denso $\mathcal{O} \subset \mathbf{L}^2$ tale che per ogni $f \in \mathcal{O}$ l'insieme S_f è finito e su ogni componente connessa di \mathcal{O} il numero di soluzioni è costante.*

Dimostrazione. Utilizziamo qui le notazioni introdotte in (7.21) e (7.22). Sia $f \in \mathbf{L}^2$; come prima cosa affermiamo che se m è abbastanza grande allora esiste $c_m > 0$ tale che

$$\|u^1 - u^2\|_{\mathbf{V}} \leq c_m \|\mathcal{P}_m(u^1 - u^2)\|_{\mathbf{L}^2} \quad \forall u^1, u^2 \in S_f. \quad (8.48)$$

In quanto segue $c > 0$ e $c_m > 0$ indicano costanti anche diverse, la seconda delle quali dipendente da m . Per dimostrare (8.48), si considerino $u^1, u^2 \in S_f$ e sia $w = u^1 - u^2$: sottraendo le due relazioni (8.41) corrispondenti a u^1 e u^2 si ottiene

$$\eta \int_{\Omega} \nabla w : \nabla v = -b(u^1, w, v) - b(w, u^2, v) \quad \forall v \in \mathbf{V};$$

scegliendo $v = \mathcal{Q}_m w$ e utilizzando il Lemma 8.2.2 si ottiene

$$\begin{aligned} \eta \|\mathcal{Q}_m w\|_{\mathbf{V}}^2 &= -b(u^1, \mathcal{P}_m w, \mathcal{Q}_m w) - b(\mathcal{P}_m w, u^2, \mathcal{Q}_m w) - b(\mathcal{Q}_m w, u^2, \mathcal{Q}_m w) \\ &\leq c \|u^1\|_{\mathbf{V}} \cdot \|\mathcal{P}_m w\|_{\mathbf{V}} \cdot \|\mathcal{Q}_m w\|_{\mathbf{V}} + c \|\mathcal{P}_m w\|_{\mathbf{V}} \cdot \|u^2\|_{\mathbf{V}} \cdot \|\mathcal{Q}_m w\|_{\mathbf{V}} \\ &\quad + c \|u^2\|_{\mathbf{V}} \cdot \|\mathcal{Q}_m w\|_{\mathbf{L}^4}^2. \end{aligned}$$

Da (8.46) e l'equivalenza delle norme in spazi finito-dimensionali si ottiene

$$c\|u^1\|_{\mathbf{V}} \cdot \|\mathcal{P}_m w\|_{\mathbf{V}} \cdot \|\mathcal{Q}_m w\|_{\mathbf{V}} + c\|\mathcal{P}_m w\|_{\mathbf{V}} \cdot \|u^2\|_{\mathbf{V}} \cdot \|\mathcal{Q}_m w\|_{\mathbf{V}} \leq c_m \|\mathcal{P}_m w\|_{\mathbf{L}^2} \cdot \|\mathcal{Q}_m w\|_{\mathbf{V}}.$$

D'altra parte, tendendo presenti (7.23), (8.46) e (8.47), si ottiene

$$c\|u^2\|_{\mathbf{V}} \cdot \|\mathcal{Q}_m w\|_{\mathbf{L}^4}^2 \leq c\lambda_{m+1}^{-1+n/4} \|\mathcal{Q}_m w\|_{\mathbf{V}}^2.$$

Riassumendo, abbiamo

$$\eta \|\mathcal{Q}_m w\|_{\mathbf{V}}^2 \leq c_m \|\mathcal{P}_m w\|_{\mathbf{L}^2} \cdot \|\mathcal{Q}_m w\|_{\mathbf{V}} + c\lambda_{m+1}^{-1+n/4} \|\mathcal{Q}_m w\|_{\mathbf{V}}^2.$$

Invece di discutere se $\mathcal{Q}_m w = 0$ o $\mathcal{Q}_m w \neq 0$, preferiamo ora applicare la disuguaglianza di Young (2.18) per ottenere

$$\eta \|\mathcal{Q}_m w\|_{\mathbf{V}}^2 \leq \left(\frac{\eta}{4} + c\lambda_{m+1}^{-1+n/4}\right) \|\mathcal{Q}_m w\|_{\mathbf{V}}^2 + c_m \|\mathcal{P}_m w\|_{\mathbf{L}^2}^2.$$

Pertanto, se m è abbastanza grande (ricordiamo che $\lambda_m \rightarrow \infty$ per $m \rightarrow \infty$ dal Teorema 7.1.21), si ha $\|\mathcal{Q}_m w\|_{\mathbf{V}}^2 \leq c_m \|\mathcal{P}_m w\|_{\mathbf{L}^2}^2$ e di conseguenza,

$$\|w\|_{\mathbf{V}}^2 = \|\mathcal{P}_m w\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathcal{Q}_m w\|_{\mathbf{V}}^2 \leq c_m \|\mathcal{P}_m w\|_{\mathbf{L}^2}^2$$

che dimostra (8.48).

Se $u^1, u^2 \in S_f$ soddisfano $\mathcal{P}_m u^1 = \mathcal{P}_m u^2$, da (8.48) deduciamo che $u^1 = u^2$: pertanto, S_f è contenuto in uno spazio isomorfo a $\text{span}\{e_1, \dots, e_m\}$. Inoltre, da (8.46) e l'immersione compatta $\mathbf{V} \subset \mathbf{L}^2$ si ha che S_f è compatto in \mathbf{L}^2 (cfr. Definizione 1.8.3), e quindi S_f è omeomorfo a un insieme compatto di \mathbb{R}^m .

La seconda parte del Teorema 8.2.10 è più delicata e può essere ottenuta applicando un'opportuna versione del Teorema di Sard-Smale, si veda ad esempio [22, Theorem A]. Questo richiede alcune conoscenze sugli operatori nonlineari di Fredholm, si veda [77, Section 8.4]. Si dovrebbe dimostrare che l'operatore $A : (\mathbf{H}^2 \cap \mathbf{V}) \rightarrow \mathbf{L}^2$ definito da $A(u) = -\eta \Delta u + (u \cdot \nabla)u$ è un particolare operatore di Fredholm di indice 0. Facciamo riferimento a [22, Section 2.2] per la dimostrazione dettagliata. \square

Alcune generalizzazioni del Teorema 8.2.10 si possono trovare in [23].

8.2.3 Equazione evolutiva

Studiamo qui l'equazione di evoluzione

$$\begin{cases} u_t - \eta \Delta u + \nabla p + (u \cdot \nabla)u = f & \text{in } \Omega \times (0, T) \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T) \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (8.49)$$

dove le incognite sono sempre il vettore u e lo scalare p mentre Ω è un aperto limitato di \mathbb{R}^n ($2 \leq n \leq 4$) con frontiera di classe C^2 . Supporremo che $f \in L^2(0, T; \mathbf{V}')$ e $u_0 \in \mathbf{G}_1$. In tali ipotesi, siamo interessati a trovare soluzioni deboli di (8.49), e cioè

$$u \in L^2(0, T; \mathbf{V}) \quad \text{tale che} \quad u(0) = u_0 \quad \text{e}$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t)v + \eta \int_{\Omega} \nabla u(t) : \nabla v + b(u(t), u(t), v) = \langle f(t), v \rangle \quad \forall v \in \mathbf{V} \text{ in } \mathcal{D}'[0, T]. \quad (8.50)$$

Osserviamo che con la sola ipotesi che $u \in L^2(0, T; \mathbf{V})$, la condizione iniziale $u(0) = u_0$ non ha senso. Infatti, una tale u non è definita puntualmente per ogni t (in particolare, per $t = 0$) dato che sta solo in $L^2(0, T)$. Per giustificare questo fatto, necessitiamo del seguente risultato:

Lemma 8.2.11. *Sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^n ($2 \leq n \leq 4$) con frontiera di classe C^2 . Supponiamo che $u \in L^2(0, T; \mathbf{V})$. Allora la funzione Bu definita da*

$$\langle Bu(t), v \rangle = b(u(t), u(t), v) \quad \forall v \in \mathbf{V} \text{ q.o. in } [0, T]$$

appartiene a $L^1(0, T; \mathbf{V}')$.

Dimostrazione. Si veda [67, Lemma III.3.1]. □

Riscriviamo adesso l'equazione in (8.50) come

$$\langle u'(t), v \rangle = -\eta \int_{\Omega} \nabla u(t) : \nabla v - b(u(t), u(t), v) + \langle f(t), v \rangle \quad \forall v \in \mathbf{V};$$

per il Lemma 8.2.11 e per le ipotesi fatte sulla f (e sulla u) ricaviamo che $u' \in L^1(0, T; \mathbf{V}')$. Per un risultato analogo al Teorema 7.2.9 otteniamo poi che $t \mapsto u(t)$ è debolmente continua da $[0, T]$ a valori in \mathbf{G}_1 (si veda la Definizione 7.3.1) nel senso che $\Phi_v : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\Phi_v(t) := \int_{\Omega} u(t)v \quad (t \in [0, T])$$

è una funzione (scalare!) continua per ogni $v \in \mathbf{G}_1$. Quindi, la condizione iniziale ha effettivamente senso dato che $u(t)$ è definita puntualmente come funzione a valori in \mathbf{G}_1 . Vale il

Teorema 8.2.12. *Sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^n ($2 \leq n \leq 4$) con frontiera di classe C^2 . Supponiamo che $f \in L^2(0, T; \mathbf{V}')$ e $u_0 \in \mathbf{G}_1$. Allora esiste almeno una soluzione $u = u(t)$ di (8.50). Inoltre, ogni soluzione u di (8.50) è debolmente continua da $[0, T]$ a valori in \mathbf{G}_1 e soddisfa $u \in L^\infty(0, T; \mathbf{G}_1)$.*

Dimostrazione. È basata sul metodo di Galerkin descritto nel Paragrafo 6.8, si veda [67, Theorem III.3.1]. □

Osservazione 8.2.13. Dopo avere ottenuto l'esistenza della u ci si dovrebbe occupare di dimostrare l'esistenza della p . Questo si riesce a fare ma l'argomento è delicato, si veda [67]. \square

Per quanto riguarda l'unicità, si ha una risposta completa solo nel caso bidimensionale:

Teorema 8.2.14. *Valgano le ipotesi del Teorema 8.2.12 e sia $n = 2$. Allora, la soluzione $u = u(t)$ di (8.50) è unica ed è q.o. uguale a una funzione continua da $[0, T]$ in \mathbf{G}_1 .*

Dimostrazione. Si veda [67, Theorem III.3.2]. \square

Come per l'equazione stazionaria, il vincolo sulla dimensione è dovuto alla regolarità della soluzione che, a sua volta, dipende dalle immersioni di Sobolev. Siccome queste immersioni sono migliori in dimensione bassa (si veda il Teorema 6.2.20), si hanno risultati più forti in queste dimensioni. Per alcuni risultati che mettono in relazione l'unicità con la regolarità si vedano [67, Theorem III.3.4] e [68, Theorem I.3.2]. Senza ulteriore regolarità, a tutt'oggi non è noto un risultato di unicità della soluzione debole per il problema (8.50) se $n \geq 3$. Segnaliamo ai lettori interessati (e avidi!) che esiste un premio di 1.000.000 di dollari per colui che riuscirà a dimostrare (o confutare) tale risultato.

8.3 Equazioni ellittiche semilineari

8.3.1 Alcuni modelli fisici descritti da equazioni non lineari

Questo paragrafo è dedicato allo studio di una classe di equazioni che modellizzano una vasta gamma di fenomeni fisici, dalla propagazione delle onde alla trasmissione del calore. Le equazioni di cui ci occuperemo sono della forma

$$-\Delta u = f(u) \tag{8.51}$$

sia su tutto \mathbb{R}^n che su domini limitati con condizione al bordo di Dirichlet. Illustreremo come sia possibile ricondursi ad una equazione di tipo (8.51) a partire da modelli fisici di diversa natura.

Iniziamo con l'equazione non lineare di Klein-Gordon

$$\Phi_{tt} - \Delta \Phi + a^2 \Phi = g(\Phi) \tag{8.52}$$

dove $\Phi = \Phi(x, t)$ è una funzione a valori in \mathbb{C} definita per $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione soddisfacente

$$g(\rho e^{i\vartheta}) = f(\rho) e^{i\vartheta}, \quad \rho, \vartheta \in \mathbb{R} \tag{8.53}$$

per un'opportuna funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e dispari. Se si cercano soluzioni di (8.52) a variabili separate della forma $\Phi(x, t) = e^{i\omega t}u(x)$ con $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\omega \in \mathbb{R}$ (ω rappresenta la frequenza angolare di oscillazione) allora da (8.53) si ha che u deve risolvere l'equazione ellittica

$$-\Delta u + (a^2 - \omega^2)u = f(u) \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \quad (8.54)$$

Anche la ricerca di soluzioni particolari per l'equazione di Schrödinger non lineare

$$i\Phi_t - \Delta\Phi = g(\Phi) \quad (8.55)$$

può ricondursi allo studio dell'equazione (8.51). In questo modello la funzione d'onda $\Phi = \Phi(x, t)$ è una funzione a valori complessi definita per $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$. Come nel caso dell'equazione di Klein-Gordon si supponga che la funzione g sia della forma (8.53). La ricerca di soluzioni di (8.55) a variabili separate del tipo $\Phi(x, t) = e^{i\omega t}u(x)$ conduce allo studio dell'equazione ellittica

$$-\Delta u - \omega u = f(u) \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \quad (8.56)$$

Per ulteriori dettagli sui modelli finora descritti si vedano [4, 7, 14, 24, 34].

La (8.51) può essere vista anche come la versione stazionaria dell'equazione

$$u_t - \Delta u = f(u) \quad (8.57)$$

dove $u = u(x, t)$ con $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$. Modelli di questo tipo provengono (ad esempio) dalla dinamica delle popolazioni dove la funzione u rappresenta la densità di popolazione al variare della posizione x e del tempo t . Per maggiori dettagli si vedano [5, 20, 21, 72].

D'altra parte l'equazione (8.57) è anche un modello di diffusione termica in cui la sorgente di calore $f(\vartheta)$ dipende in modo non lineare dalla temperatura ϑ . Modelli non lineari di questo tipo si possono trovare quando si considera un processo di combustione nel quale si abbia una miscela contenente una sostanza combustibile la cui densità sia ρ , cfr. [31]. La temperatura ϑ della miscela e la concentrazione del combustibile ρ evolvono una in funzione dell'altra nel modo seguente: durante il processo di combustione viene liberata una certa quantità di calore dipendente sia da ϑ che da ρ . D'altra parte, una certa quantità di combustibile viene distrutta durante la reazione, la velocità della quale dipende da ϑ e da ρ . Un fenomeno di questo tipo può essere modellizzato dal sistema di equazioni

$$\begin{cases} \vartheta_t - k\Delta\vartheta = f_1(\vartheta, \rho) \\ \rho_t - D\Delta\rho = f_2(\vartheta, \rho) \end{cases} \quad (8.58)$$

dove nell'equazione del calore (3.91) si è supposto che $C_V = 1$. La funzione $f_1(\vartheta, \rho)$ è positiva in quanto la reazione produce calore ed è crescente rispetto a ϑ e a ρ in

quanto la velocità della reazione sarà tanto più rapida quanto più saranno elevate la temperatura della miscela e la densità del combustibile. Al contrario, la funzione $f_2(\vartheta, \rho)$ è negativa in quanto la reazione distrugge il combustibile ed è crescente in valore assoluto rispetto a ϑ e a ρ sempre a causa della dipendenza della velocità della reazione da temperatura e densità. Una possibile scelta di queste due funzioni è data da $f_1(\vartheta, \rho) = \varepsilon_1(1 + \vartheta)^{p-1}\rho^{q-1}$ e $f_2(\vartheta, \rho) = -\varepsilon_2(1 + \vartheta)^{p-1}\rho^{q-1}$ con $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ e $p, q > 1$. Il processo di combustione all'interno del serbatoio Ω contenente la miscela può avvenire sostanzialmente in due modi diversi. Nel primo tipo di reazione il calore prodotto dalla combustione non ha il tempo sufficiente per essere disperso attraverso le pareti del serbatoio con un conseguente aumento della temperatura e della velocità della reazione fino a che non si manifesti una mancanza di combustibile. Nel secondo tipo di reazione il coefficiente di diffusione termica è sufficientemente grande da consentire al calore prodotto dalla reazione di fuoriuscire velocemente dalle pareti del serbatoio. In quest'ultimo tipo di processo è ragionevole pensare che durante la reazione, per tempi abbastanza vicini all'istante iniziale, la quantità di combustibile rimanga pressochè costante in modo tale che $\rho = \rho_0$ dove la costante ρ_0 è la concentrazione del combustibile all'istante iniziale. L'equazione del calore in (8.58) diventa

$$\vartheta_t - k\Delta\vartheta = f_1(\vartheta, \rho_0). \quad (8.59)$$

Inoltre se il coefficiente di diffusione k è sufficientemente grande, per tempi vicini all'istante iniziale la soluzione di (8.59) non si discosta molto dalla soluzione dell'equazione stazionaria

$$-k\Delta\vartheta = f_1(\vartheta, \rho_0). \quad (8.60)$$

Se imponiamo che la temperatura sia assegnata sulle pareti del serbatoio, sia cioè $\vartheta = \vartheta_0$ su $\partial\Omega$, allora il verificarsi o meno del secondo tipo di processo al variare di k è equivalente al problema dell'esistenza o meno di una soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -k\Delta\vartheta = f_1(\vartheta, \rho_0) & \text{in } \Omega \\ \vartheta = \vartheta_0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (8.61)$$

Concludiamo questa parte dedicata alle applicazioni fisiche descrivendo il seguente modello tratto da [27]: sia Ω un corpo che viene riscaldato dal passaggio di una corrente costante in direzione e intensità e sia I la densità superficiale di corrente. Si supponga che la resistività R di questo corpo dipenda in modo non lineare dalla temperatura, sia cioè $R = R(\vartheta)$ dove $\vartheta = \vartheta(x, t)$ indica la temperatura del corpo. È del tutto ragionevole pensare che la resistività aumenti con la temperatura e che quindi la funzione $\vartheta \mapsto R(\vartheta)$ sia monotona crescente e che $R(0) > 0$. Una possibile scelta della funzione R è data da $R(\vartheta) = (1 + \vartheta)^{p-1}$ per un certo $p > 1$. Siccome la quantità di calore per unità di volume e di tempo che si produce a causa del passaggio della corrente è data da RI^2 , allora una volta supposto che $k = C_V = 1$

l'equazione del calore (3.91) diventa

$$\vartheta_t - \Delta\vartheta = I^2R(\vartheta). \tag{8.62}$$

A questo punto ci si può chiedere per quali valori di I esistano soluzioni stazionarie di (8.62) che soddisfino la condizione di Dirichlet $\vartheta = \vartheta_0$ su $\partial\Omega$. In conclusione, anche in questo caso si è condotti a studiare un problema di Dirichlet del tipo

$$\begin{cases} -\Delta\vartheta = I^2R(\vartheta) & \text{in } \Omega \\ \vartheta = \vartheta_0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{8.63}$$

8.3.2 Soluzioni deboli e loro regolarità

Iniziamo a considerare equazioni del tipo (8.51) su domini limitati. Sia pertanto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera di classe C^1 e si consideri il seguente problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{8.64}$$

dove $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1 . Diremo che $u \in H_0^1(\Omega)$ è **soluzione debole** di (8.64) se

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \int_{\Omega} f(u)v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Una giustificazione per questo tipo di definizione di soluzione può essere data procedendo come nel caso delle equazioni ellittiche lineari descritte nel Capitolo 7. Seguendo infatti lo stesso procedimento introdotto nel Capitolo 7 è possibile verificare che le soluzioni classiche di (8.64) sono soluzioni deboli e viceversa le soluzioni deboli di classe $C^2(\overline{\Omega})$ sono soluzioni classiche.

Per questa ragione può essere importante individuare condizioni sufficienti tali per cui le soluzioni deboli siano anche soluzioni classiche. Affinchè ciò accada, è necessario imporre condizioni sulla crescita della funzione f all'infinito; all'uopo ricordiamo che se $n \geq 3$ il numero $2^* = 2n/(n - 2)$ è l'esponente critico di Sobolev introdotto nel Teorema 6.2.21. Vale infatti il seguente

Teorema 8.3.1. (di Brezis-Kato). *Supponiamo che $n \geq 3$ e che $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sia un aperto limitato con $\partial\Omega \in C^1$. Se esiste una costante $C > 0$ tale che*

$$|f(s)| \leq C(1 + |s|^{2^*-1}) \quad \forall s \in \mathbb{R} \tag{8.65}$$

allora ogni soluzione debole di (8.64) è una soluzione classica.

Dimostrazione. Si veda [11]. □

Il risultato del Teorema 8.3.1 è ottimale poichè se f viola la condizione di crescita (8.65) allora possono esistere soluzioni deboli di (8.64) che non sono soluzioni classiche come mostrato dal seguente

Esempio 8.3.2. Sia $p > \frac{2(n-1)}{n-2}$, sia B la palla unitaria di \mathbb{R}^n centrata nell'origine e si consideri il problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda(1+u)^{p-1} & \text{in } B \\ u = 0 & \text{su } \partial B \end{cases} \quad (8.66)$$

con $\lambda = \frac{2}{p-2}(n-2 - \frac{2}{p-2}) > 0$. La funzione $u(x) = |x|^{-2/(p-2)} - 1$ risolve (8.66) in $B \setminus \{0\}$. È una semplice verifica dimostrare che $u \in H_0^1(B)$ se e soltanto se $p > 2^*$. Pertanto u è una soluzione debole di (8.66) se e soltanto se $p > 2^*$. Tuttavia essa non è soluzione classica visto che non è limitata. Per $p \leq 2^*$, la funzione u non appartiene a $H_0^1(B)$ e quindi non è una soluzione debole. Essa comunque soddisfa l'equazione in (8.66) nel senso delle derivate classiche in ogni punto $x \in B \setminus \{0\}$. Inoltre, grazie alla condizione $p > \frac{2(n-1)}{n-2}$, possiamo affermare che $u \in L^{p-1}(B)$ e che u risolve l'equazione in (8.66) nel senso delle distribuzioni e cioè

$$-\int_B u \Delta \varphi = \lambda \int_B (1+u)^{p-1} \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(B). \quad \square$$

8.3.3 Il ruolo dell'esponente critico di Sobolev

Per evidenziare il ruolo dell'esponente 2^* dobbiamo supporre che $n \geq 3$. Iniziamo a trattare il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{p-1} & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (8.67)$$

La richiesta che la soluzione sia positiva ($u > 0$) è dovuta a motivi fisici, si veda il Paragrafo 8.3.1; in particolare, siamo interessati a soluzioni *non banali* del problema di Dirichlet omogeneo in (8.67).

Prima di iniziare lo studio di (8.67) introduciamo alcune nozioni riguardanti i funzionali (funzioni a valori in \mathbb{R}) definiti su spazi di Banach.

Definizione 8.3.3. Sia X uno spazio di Banach e sia $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ un funzionale.

(i) Diremo che J è continuo se vale l'implicazione

$$u_m \rightarrow u \text{ in } X \quad \implies \quad J(u_m) \rightarrow J(u) .$$

(ii) Diremo inoltre che J è differenziabile secondo Fréchet in X se per ogni $u \in X$ esiste un funzionale lineare e continuo su X che indichiamo con $J'(u)$, tale che

$$u_m \rightarrow u \text{ in } X \implies \frac{|J(u_m) - J(u) - \langle J'(u), u_m - u \rangle|}{\|u_m - u\|_X} \rightarrow 0.$$

Il funzionale $J'(u) \in X'$ verrà chiamato **derivata** di J in u .

(iii) Diremo che J è di classe C^1 in X se J è differenziabile secondo Fréchet in X e se la mappa $J' : X \rightarrow X'$ è continua nel senso che vale l'implicazione

$$u_m \rightarrow u \text{ in } X \implies J'(u_m) \rightarrow J'(u) \text{ in } X'.$$

Esercizio 8.3.4. Riscrivere la Definizione 8.3.3 nel caso $X = \mathbb{R}^n$ e ritrovare la definizione di differenziabilità di una funzione di più variabili reali. \square

Nel seguente esempio introduciamo un paio di funzionali che torneranno utili nello studio del problema (8.67).

Esempio 8.3.5. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e sia $X = H_0^1(\Omega)$. Allora $J(u) = \|\nabla u\|_{L^2}^2$ e $I_p(u) = \|u\|_{L^p}^p$ con $1 < p \leq 2^*$ sono di classe C^1 e inoltre

$$\langle J'(u), v \rangle = 2 \int_{\Omega} \nabla u \nabla v, \quad \langle I_p'(u), v \rangle = p \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv. \quad (8.68)$$

Osserviamo che per $p = 1$ il funzionale I_p è continuo ma non è differenziabile mentre per $p > 2^*$, il funzionale I_p non è ben definito su $H_0^1(\Omega)$ in quanto esistono funzioni di $H_0^1(\Omega)$ che non appartengono a $L^p(\Omega)$. \square

La Definizione 8.3.3 e l'Esempio 8.3.5 giocano un ruolo importante nella dimostrazione del

Teorema 8.3.6. *Sia $n \geq 3$ e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con $\partial\Omega \in C^1$. Se $2 < p < 2^*$, il problema (8.67) ammette almeno una soluzione.*

Dimostrazione. Invece di procedere direttamente con lo studio di (8.67), consideriamo il seguente problema di minimizzazione il cui legame con le soluzioni di (8.67) verrà spiegato in seguito. Ci proponiamo di studiare la miglior costante S_p nella disuguaglianza di Sobolev

$$S_p \|u\|_{L^p}^2 \leq \|\nabla u\|_{L^2}^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \quad (8.69)$$

La disuguaglianza (8.69) esprime la continuità dell'immersione $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ (si veda il Teorema 6.2.20). In altre parole la costante S_p è la più grande costante $C > 0$ per cui vale la disuguaglianza

$$C \|u\|_{L^p}^2 \leq \|\nabla u\|_{L^2}^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Osserviamo che se $p = 2$ (caso non contemplato nelle ipotesi), la (8.69) si riduce alla disuguaglianza di Poincaré, cfr. Teorema 6.2.18.

Posto $B = \{u \in H_0^1(\Omega); \|u\|_{L^p} = 1\}$, S_p ammette la seguente caratterizzazione:

$$S_p = \inf_{u \in B} \|\nabla u\|_{L^2}^2. \quad (8.70)$$

Stiamo cioè minimizzando il funzionale $J(u) = \|\nabla u\|_{L^2}^2$ con il vincolo $I_p(u) = \|u\|_{L^p}^p = 1$. Cerchiamo di stabilire per quali valori di p il minimo in (8.70) viene raggiunto. A tale scopo, consideriamo una successione minimizzante per S_p e cioè una successione $\{u_m\} \subset B$ tale che $\|\nabla u_m\|_{L^2}^2 \rightarrow S_p$ per $m \rightarrow \infty$. Tale successione risulta limitata in $H_0^1(\Omega)$ e quindi, a meno di una sottosuccessione, per il Teorema 1.4.13 possiamo affermare che esiste $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ tale che $u_m \rightarrow \bar{u}$. Essendo $p < 2^*$, grazie alla compattezza dell'immersione $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ (si veda il Teorema 6.6.3) possiamo affermare che $u_m \rightarrow \bar{u}$ fortemente in $L^p(\Omega)$: in particolare, questo prova che $\bar{u} \in B$. D'altra parte, ancora per il Teorema 1.4.13 abbiamo

$$\|\nabla \bar{u}\|_{L^2}^2 \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\nabla u_m\|_{L^2}^2 = S_p.$$

Di conseguenza, la funzione $\bar{u} \in B$ soddisfa $\|\nabla \bar{u}\|_{L^2}^2 = S_p$.

Si può verificare che se $u \in H_0^1(\Omega)$ allora $|u| \in H_0^1(\Omega)$ e $|\nabla u| = |\nabla |u||$ q.o. in Ω . Applicando questo risultato a \bar{u} e osservando che $\|\bar{u}\|_{L^p} = \|\bar{u}\|_{L^p}$ si ha che

$$|\bar{u}| \in B \quad \text{e} \quad \|\nabla |\bar{u}|\|_{L^2}^2 = \|\nabla \bar{u}\|_{L^2}^2 = S_p.$$

A meno di sostituire \bar{u} con $|\bar{u}|$ possiamo affermare che esiste una funzione non nulla $\bar{u} \geq 0$ q.o. in Ω per la quale vale l'uguaglianza in (8.69). Tale \bar{u} è un punto di minimo del funzionale J vincolato a B . Usando la versione infinito-dimensionale del Teorema dei moltiplicatori di Lagrange, si deduce che esiste $\lambda > 0$ tale che

$$J'(\bar{u}) = \lambda I_p'(\bar{u})$$

con J e I_p come nell'Esempio 8.3.5. Per verificare che $\lambda > 0$ basta osservare che

$$0 < 2\|\nabla \bar{u}\|_{L^2}^2 = \langle J'(\bar{u}), \bar{u} \rangle = \lambda \langle I_p'(\bar{u}), \bar{u} \rangle = \lambda p \|\bar{u}\|_{L^p}^p = \lambda p.$$

Da (8.68) si ottiene

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{u} \nabla v = \frac{\lambda p}{2} \int_{\Omega} \bar{u}^{p-1} v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Posto $\bar{v} = (\frac{\lambda p}{2})^{1/(p-2)} \bar{u}$, dalla precedente identità si ricava

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{v} \nabla v = \int_{\Omega} \bar{v}^{p-1} v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Applicando il Teorema 8.3.1 otteniamo che $\bar{v} \geq 0$ è soluzione classica del problema

$$\begin{cases} -\Delta \bar{v} = \bar{v}^{p-1} & \text{in } \Omega \\ \bar{v} = 0 & \text{su } \partial\Omega . \end{cases}$$

Se Ω è connesso, dato che $-\Delta \bar{v} \geq 0$ in Ω , per il principio del massimo (si veda il Corollario 3.6.15), otteniamo che $\bar{v} > 0$ in Ω . Se invece Ω non è connesso, bisogna verificare che $\bar{v} > 0$ in ogni componente connessa di Ω ; lasciamo al lettore questa verifica che si ottiene ragionando per assurdo, sfruttando la disuguaglianza

$$\frac{a+b}{c+d} < \frac{a}{c} + \frac{b}{d} \quad \forall a, b, c, d > 0 ,$$

e il fatto che S_p è un minimo. □

Vedremo ora che l'ipotesi $p < 2^*$ è necessaria per la validità del Teorema 8.3.6. Intanto incominciamo ad osservare che la sua dimostrazione non funziona nel caso $p \geq 2^*$ in quanto l'immersione $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ non è più compatta per $p = 2^*$ mentre non è più valida per $p > 2^*$. Diamo la seguente

Definizione 8.3.7. *Diciamo che un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è **stellato** rispetto al punto $x_0 \in \Omega$ se per ogni $x \in \partial\Omega$ risulta $(x - x_0) \cdot \nu_x > 0$ dove ν_x è la normale esterna a $\partial\Omega$ nel punto x .*

Un insieme stellato è quindi un insieme il cui bordo “può essere illuminato da una sola lampadina”: si mette la lampadina nel centro di stellatura x_0 e il raggio luminoso raggiungerà tutti i punti di $\partial\Omega$ con un angolo minore dell'angolo retto. Inoltre il segmento $\overline{x_0x}$ (il raggio luminoso) è interamente contenuto in Ω .

Vale allora il

Teorema 8.3.8. (di Pohozaev). *Sia $n \geq 3$ e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) un aperto limitato stellato con $\partial\Omega \in C^1$. Se $p \geq 2^*$, il problema (8.67) non ammette soluzioni.*

Dimostrazione. Osserviamo che (8.67) è un problema autonomo e cioè ambo i membri dell'equazione non dipendono direttamente da x ma solo indirettamente tramite la funzione u . Di conseguenza a meno di traslazioni del dominio Ω che, per il suddetto motivo lascerebbero invariata l'equazione, possiamo supporre che il centro di stellatura di Ω sia l'origine 0 e che quindi

$$x \cdot \nu > 0 \quad \text{su } \partial\Omega . \tag{8.71}$$

Supponiamo ora che $u > 0$ sia soluzione di (8.67); allora, dato che $\partial\Omega$ è curva di livello 0 di u , il suo gradiente ∇u è parallelo alla normale ν sul bordo e quindi

$$(x \cdot \nabla u) \frac{\partial u}{\partial \nu} = (x \cdot \nu) \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 = (x \cdot \nu) |\nabla u|^2 \quad \text{su } \partial\Omega . \tag{8.72}$$

Si ha ora integrando per parti

$$\int_{\Omega} \Delta u (x \cdot \nabla u) = \int_{\partial\Omega} (x \cdot \nabla u) \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_{\Omega} \nabla u \nabla (x \cdot \nabla u) \quad (8.73)$$

e, dopo aver osservato che

$$\nabla u \nabla (x \cdot \nabla u) = |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right],$$

da (8.73) si ottiene

$$\int_{\Omega} \Delta u (x \cdot \nabla u) = \int_{\partial\Omega} (x \cdot \nabla u) \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right].$$

Con un'ulteriore integrazione per parti si ha

$$\begin{aligned} &= \int_{\partial\Omega} (x \cdot \nabla u) \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left[\int_{\partial\Omega} x_j \nu_j \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right] \\ &= \int_{\partial\Omega} (x \cdot \nabla u) \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (x \cdot \nu) |\nabla u|^2 + \frac{n-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \end{aligned}$$

e da (8.72) si ha infine

$$\int_{\Omega} \Delta u (x \cdot \nabla u) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (x \cdot \nu) |\nabla u|^2 + \frac{n-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2. \quad (8.74)$$

Osserviamo ora che

$$u^{p-1} (x \cdot \nabla u) = \frac{1}{p} \operatorname{div}(x u^p) - \frac{n}{p} u^p. \quad (8.75)$$

Da (8.75), utilizzando il Teorema della divergenza e sfruttando il fatto che $u = 0$ su $\partial\Omega$, si ottiene

$$\int_{\Omega} (x \cdot \nabla u) u^{p-1} = \frac{1}{p} \int_{\partial\Omega} (x \cdot \nu) u^p - \frac{n}{p} \int_{\Omega} u^p = -\frac{n}{p} \int_{\Omega} u^p. \quad (8.76)$$

Inoltre, moltiplicando l'equazione in (8.67) per u , integrando per parti e sfruttando ancora il fatto che $u = 0$ su $\partial\Omega$, si ha

$$\int_{\Omega} u^p = - \int_{\Omega} u \Delta u = \int_{\Omega} |\nabla u|^2. \quad (8.77)$$

Inserendo (8.77) in (8.74) abbiamo

$$\int_{\Omega} \Delta u (x \cdot \nabla u) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (x \cdot \nu) |\nabla u|^2 + \frac{n-2}{2} \int_{\Omega} u^p. \quad (8.78)$$

D'altra parte, moltiplicando l'equazione in (8.67) per $(x \cdot \nabla u)$ e integrando, da (8.76) si deduce

$$-\int_{\Omega} \Delta u (x \cdot \nabla u) = \int_{\Omega} (x \cdot \nabla u) u^{p-1} = -\frac{n}{p} \int_{\Omega} u^p. \quad (8.79)$$

Da (8.78) e (8.79) si ottiene infine

$$\frac{2n - (n - 2)p}{2p} \int_{\Omega} u^p = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 (x \cdot \nu). \quad (8.80)$$

Per la (8.71), il secondo membro di (8.80) è non negativo; se fosse nullo, sarebbe $|\nabla u| = 0$ su $\partial\Omega$, il che è assurdo dato che dal Teorema della divergenza si avrebbe

$$0 = \int_{\partial\Omega} |\nabla u| = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} = - \int_{\Omega} \Delta u = \int_{\Omega} u^{p-1} > 0,$$

Quindi, il secondo membro di (8.80) è strettamente positivo; ma allora deve essere positivo anche il primo membro di (8.80) e cioè $2n - (n - 2)p > 0$.

Abbiamo così dimostrato che se (8.67) ammette soluzione su un insieme stellato, deve necessariamente essere $p < 2^*$. Questo completa la dimostrazione. \square

Osservazione 8.3.9. In realtà il Teorema 8.3.8 vale nell'ipotesi più tenue di stellatura larga, e cioè se la disuguaglianza (8.71) diventa $x \cdot \nu \geq 0$, si veda [57]. In tal caso, serve però il principio di Hopf che garantisce che una funzione positiva e superarmonica in Ω soddisfa $|\nabla u| > 0$ su tutto $\partial\Omega$ se $u = 0$ su $\partial\Omega$. \square

Il Teorema 8.3.8 è valido in insiemi stellati; senza questa ipotesi, il problema (8.67) può ammettere soluzioni anche se $p \geq 2^*$, si veda [56]. Tuttavia, anche se solo in ipotesi di stellatura, i Teoremi 8.3.6 e 8.3.8 evidenziano una sostanziale differenza tra il caso sottocritico $p < 2^*$ e il caso supercritico $p \geq 2^*$.

Anche nel caso di equazioni su tutto \mathbb{R}^n , l'esponente critico 2^* gioca un ruolo fondamentale. Cominciamo a enunciare due risultati che riteniamo significativi:

Teorema 8.3.10. *Sia $n \geq 3$ e per $p > 1$ si consideri l'equazione*

$$-\Delta u = u^{p-1}, \quad u \geq 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \quad (8.81)$$

(i) *Se $p < 2^*$ allora l'unica soluzione di (8.81) è $u \equiv 0$.*

(ii) *Se $p \geq 2^*$ allora (8.81) ammette infinite soluzioni limitate positive e a simmetria radiale rispetto all'origine.*

Dimostrazione. Si veda [35] e [52, Theorem 6.4]. \square

Quindi, anche per il problema (8.81) l'esponente critico 2^* è il valore della potenza p in cui avviene il passaggio dall'esistenza alla non esistenza di soluzioni non banali. Tuttavia, rispetto al problema di Dirichlet su un aperto limitato Ω , la situazione è

invertita nel senso che l'esistenza di soluzioni non banali per (8.81) avviene nel caso $p \geq 2^*$ mentre per il problema (8.67) avveniva nel caso $2 < p < 2^*$.

Il prossimo enunciato fornisce un'ulteriore conferma del ruolo giocato da 2^* nello studio delle equazioni ellittiche semilineari.

Teorema 8.3.11. *Sia $n \geq 3$ e per $1 < q < p$ si consideri l'equazione*

$$-\Delta u = -u^{q-1} + u^{p-1}, \quad u \geq 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \quad (8.82)$$

(i) *Se $p < 2^*$ allora (8.82) ammette un'unica soluzione limitata positiva e a simmetria radiale rispetto all'origine.*

(ii) *Se $p \geq 2^*$ allora l'unica soluzione limitata di (8.82) è $u \equiv 0$.*

Dimostrazione. Si vedano [7, 30, 51, 63]. □

Questa volta, a differenza del problema (8.81) le soluzioni non banali esistono se e soltanto se $p < 2^*$. Questo apparentemente inspiegabile fenomeno è dovuto al diverso comportamento delle funzioni $f_1(s) = s^{p-1}$ e $f_2(s) = -s^{q-1} + s^{p-1}$ per $s \rightarrow 0^+$. Infatti, essendo $1 < q < p$ si ha che la funzione f_2 è negativa per $s > 0$ sufficientemente vicino a $s = 0$ mentre la funzione f_1 è positiva per ogni $s > 0$. Una spiegazione dettagliata sul diverso comportamento dei problemi (8.81) e (8.82) richiederebbe l'introduzione di tecniche matematiche avanzate che esulano dalle finalità di questo testo e pertanto per maggiori chiarimenti si rimanda a [30, 52].

8.3.4 Altri esponenti critici

Oltre all'esponente critico di Sobolev analizzato nel Paragrafo 8.3.3, esistono altri esponenti critici dell'analisi funzionale che intervengono in questioni di varia natura legate alle soluzioni di equazioni ellittiche del tipo (8.51).

Per mantenere la stessa struttura del paragrafo precedente, iniziamo dunque con un problema di analisi funzionale. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) un insieme aperto limitato con frontiera $\partial\Omega$ non vuota di classe C^1 e sia $\gamma_0 : H^1(\Omega) \mapsto L^q(\partial\Omega)$ l'operatore di traccia introdotto nel Teorema 6.5.3. Ci chiediamo quale sia il più grande valore di $q \geq 2$ per il quale questo operatore risulti continuo. Da [1, Theorem 5.22] sappiamo che questo valore è

$$q = 2_T = \frac{2(n-1)}{n-2}.$$

In altre parole, vale il seguente risultato:

$$\exists C = C_\Omega > 0, \quad \|\gamma_0 u\|_{L^q(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

per ogni $1 \leq q \leq 2_T$ e 2_T è il massimo esponente possibile. Chiameremo 2_T **esponente critico di traccia**.

Cerchiamo ora soluzioni deboli del problema

$$\begin{cases} -\Delta u \geq u^{p-1} & \text{in } \mathbb{R}^n \\ u \geq 0, \quad u \not\equiv 0 & \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (8.83)$$

Per soluzione debole di (8.83) intendiamo una funzione $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla \varphi \geq \int_{\mathbb{R}^n} u^{p-1} \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \varphi \geq 0,$$

dove con $H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ si intende l'insieme delle funzioni definite su \mathbb{R}^n la cui restrizione a un qualunque aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ appartiene a $H^1(\Omega)$.

Il primo risultato che evidenzia l'importanza dell'esponente critico di traccia è il

Teorema 8.3.12. *Supponiamo che $n \geq 3$ e $p > 1$.*

(i) *Se $p \leq 2_T$, allora (8.83) non ha soluzioni deboli $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.*

(ii) *Se $p > 2_T$ allora (8.83) ha infinite soluzioni deboli.*

Dimostrazione. Si veda [50, Theorem 12.1], [50, p.53], [64, Theorem I]. □

L'esponente 2_T interviene anche nell'esistenza di soluzioni del problema

$$\Delta u = u^{q-1} \quad \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (8.84)$$

con le condizioni

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{n-2} u(x) = [n(n-2)]^{(n-2)/2}, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0. \quad (8.85)$$

Osserviamo che da (8.85) si deduce che u ha una singolarità per $x \rightarrow 0$ dello stesso ordine di grandezza della soluzione fondamentale di $-\Delta u = \delta_0$. Vale il

Teorema 8.3.13. *Supponiamo che $n \geq 3$ e $q > 1$.*

(i) *Se $q < 2_T$, allora (8.84)-(8.85) ha un'unica soluzione radiale non negativa.*

(ii) *Se $q \geq 2_T$ allora (8.84)-(8.85) non ha soluzione.*

Dimostrazione. Si veda [19], [28] e [70, Theorem 1.1]. □

Osservazione 8.3.14. Osserviamo che 2_T si nasconde anche nel problema (8.66): infatti $\lambda = \frac{2}{p-2}(n-2 - \frac{2}{p-2}) > 0$ se e solo se $p > 2_T$. □

Concludiamo questo paragrafo (e l'intero libro) con l'introduzione di un terzo esponente critico. Una conseguenza del Teorema 8.3.8 è che la miglior costante di Sobolev S_{2^*} definita in (8.70) non è raggiunta se Ω è stellato e cioè il problema

$$S_{2^*} = \inf_{u \in B} \|\nabla u\|_{L^2}^2$$

con B come in (8.70), non ammette una funzione minimizzante. Infatti, se la miglior costante di Sobolev venisse raggiunta, procedendo come nella dimostrazione del Teorema 8.3.6 si otterrebbe l'esistenza di una soluzione di (8.67), in contraddizione con il Teorema 8.3.8. In realtà è possibile dimostrare che S_{2^*} non è raggiunta in nessun dominio Ω limitato. È quindi lecito chiedersi se per qualche $q \geq 1$ esista una costante positiva C_q (dipendente da Ω e da q) tale che

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq S_{2^*} \|u\|_{L^{2^*}}^2 + C_q \|u\|_{L^q}^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) .$$

Per rispondere a questa domanda introduciamo l'esponente

$$2_R = \frac{n}{n-2} = 2_T - 1 ;$$

allora la risposta al quesito precedente è data dal

Teorema 8.3.15. (di Brezis-Nirenberg). *Sia $n \geq 3$ e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera C^1 . Allora per ogni $q \in [1, 2_R)$ esiste $C_q > 0$ tale che*

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq S_{2^*} \|u\|_{L^{2^*}}^2 + C_q \|u\|_{L^q}^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) .$$

Inoltre, $\lim_{q \rightarrow 2_R^-} \overline{C}_q = 0$, dove

$$\overline{C}_q = \inf_{\|u\|_{L^q}=1} (\|\nabla u\|_{L^2}^2 - S_{2^*} \|u\|_{L^{2^*}}^2) .$$

Dimostrazione. Si veda [12]. □

Il Teorema 8.3.15 afferma che la disuguaglianza di Sobolev può essere migliorata aggiungendo una norma L^q se e solo se $q < 2_R$. Chiameremo quindi 2_R **esponente critico del termine residuo** o semplicemente esponente critico residuo.

Per concludere, presentiamo un risultato che lega tra di loro i tre esponenti critici introdotti. Il Teorema 8.3.11 suggerisce di studiare il comportamento delle soluzioni positive di (8.82) (che esistono se $p < 2^*$) quando $p \rightarrow (2^*)^-$ dato che per $p = 2^*$ il problema (8.82) non ammette soluzioni positive. Nel prossimo (e ultimo!) risultato descriviamo il comportamento asintotico della norma L^∞ :

Teorema 8.3.16. (di Ferrero-Gazzola). *Per ogni $1 < q < p < 2^*$ sia u_p l'unica soluzione radiale positiva di (8.82). Allora, esistono $\alpha_{n,q}, \beta_n, \gamma_{n,q} > 0$ tali che*

$$\lim_{p \rightarrow 2^*} (2^* - p) \|u_p\|_{L^\infty}^{2^*-q} = \alpha_{n,q} \quad \text{se } q > 2_R$$

$$\lim_{p \rightarrow 2^*} \frac{2^* - p}{|\log(2^* - p)|} \|u_p\|_{L^\infty}^{\frac{n}{n-2}} = \beta_n \quad \text{se } q = 2_R$$

$$\lim_{p \rightarrow 2^*} (2^* - p) \|u_p\|_{L^\infty}^{\frac{2^*-q}{2_T-q}} = \gamma_{n,q} \quad \text{se } q < 2_R .$$

Dimostrazione. Si veda [19] e si vedano anche risultati precedenti in [28, 29]. \square

Il Teorema 8.3.16 mostra che $\|u_p\|_{L^\infty} \rightarrow +\infty$ per $p \rightarrow (2^*)^-$. La divergenza della norma L^∞ per $p \rightarrow (2^*)^-$ fornisce una spiegazione intuitiva della ragione per cui per $p = 2^*$ non esistano soluzioni positive di (8.82).

