1 Scelte in regime di incertezza

Molte decisioni individuali vengono assunte in condizioni di incertezza. Noi ci concentriamo su una particolare forma di incertezza, la cosiddetta *incertezza ambientale*. Diciamo che un agente opera in un contesto di incertezza ambientale quando l'incertezza riguarda variabili esogene che non sono sotto il controllo degli operatori, né dipendono dalle scelte degli operatori stessi (per esempio, le condizioni metereologiche o l'esito di una lotteria).

Un modo per formalizzare l'incertezza ambientale è quello di individuare tutte le possibili configurazioni di tali variabili esogene – tutti i possibili stati del mondo – e attribuire a ciascuna di esse una probabilità.

Esempio 1.

Stato del mondo	**probabilità**
Piove	pr. 0,3
Non piove	pr. 0,7

Nel lancio di un dado:

Stato del mondo	**probabilità**
Esce 1	pr. 1/6
Esce 2	pr. 1/6
Esce 3	pr. 1/6
Esce 4	pr. 1/6
Esce 5	pr. 1/6
Esce 6	pr. 1/6

L'esempio chiarisce il significato di incertezza ambientale. L'agricoltore non può controllare le condizioni metereologiche, né la sua scelta di seminare o non seminare influenza in alcun modo le condizioni metereologiche stesse. Peraltro, la sua scelta di seminare o non seminare gli darà guadagni diversi a seconda che piova o non piova. Abbiamo pertanto bisogno di sviluppare una teoria che ci spieghi come decidere in situazioni di questo tipo. Prima di procedere in questo senso, sono necessarie alcune precisazioni sulla rappresentazione dell'incertezza ambientale.

- L'insieme degli stati del mondo deve essere esaustivo (nessuna eventualità deve essere trascurata) – nel lancio di un dado sono possibili solo i sei stati del mondo indicati.
- Gli stati del mondo previsti devono essere mutualmente esclusivi (se esce un numero non ne esce un altro).
- I due punti precedenti implicano che la somma delle probabilità assegnate a tutti gli stati del mondo debba essere 1.

Assumeremo inoltre che:

- L'insieme degli stati del mondo sia noto agli operatori.

- Gli operatori siano ex-post in grado di riconoscere quale stato del mondo si è verificato.

Naturalmente se a uno stato del mondo si attribuisce probabilità 1, si ritiene certo che si verifichi proprio quello stato del mondo. Se vi si attribuisce probabilità zero, si ritiene impossibile che esso si verifichi.

1.1 Il prospetto

Immaginiamo un piano d'azione H il cui esito dipenda dallo stato del mondo. Vi sono S stati del mondo possibili.

Indichiamo con $i = 1, 2, ..., S$ gli stati del mondo e con $[x_1, x_2, ...x_S]_H$ il vettore dei redditi (payoff) dell'operatore nei vari possibili stati del mondo, nel caso in cui egli adotti il piano d'azione H. Poichè l'agente è in grado di attribuire una probabilità agli stati del mondo, è in grado di associare una probabilità a ciascuno di questi payoff. In altre parole, l'agente è in grado di costruire un prospetto per questo piano d'azione, ossia una tabella di payoff e relative probabilità. Un prospetto è quindi una 'distribuzione di probabilità' dei payoff.

Esempio 2.

Un agricoltore deve decidere se fertilizzare o meno un campo. Deve assumere questa decisione non sapendo se pioverà o non pioverà. L'agricoltore ritiene che vi sia il 50 per cento di probabilità che piova e il 50 per cento che non piova.

Costruiamo i prospetti dei piani d'azione 'fertilizzare' e 'non fertilizzare'.

Prospetto del piano d'azione fertilizzare (prospetto A)

(Stato del mondo)	reddito	probabilità
(Piove)	50	0,5
(Non piove)	10	0,5

Prospetto del piano d'azione non fertilizzare (prospetto B)

(Stato del mondo)	reddito	probabilità
(Piove)	30	0,5
(Non piove)	30	0,5

Studieremo la scelta tra fertilizzare e non fertilizzare come scelta tra questi due prospetti. In generale la scelta in condizioni di incertezza è scelta tra prospetti diversi. Esattamente come nella teoria della scelta del consumatore abbiamo ipotizzato che il consumatore ordini i vari possibili panieri di beni, qui assumiamo che il consumatore 'ordini' i vari prospetti.

Per comodità d'ora in poi utilizzeremo la segeuente notazione per un generico prospetto H:

$$[x_1, x_2, ..., x_S; p_1, p_2, ..., p_S]_H$$

dove $p_1, p_2, ..., p_S$ sono le probabilità associate ai vari stati del mondo.

1.1.1 Le caratteristiche di un prospetto

Prima di definire un criterio di ordinamento tra i vari prospetti, notiamo che tra le varie caratteristiche di un prospetto due sono particolarmente rilevanti ai nostri fini. La prima è il *valore atteso* del reddito associato al prospetto stesso.

Definizione: il valore atteso di un prospetto H, indicato con $E(x)_H$ oppure $\overline{x}_H$, è definito come:

$$E(x)_H = \sum_{i=1}^{S} p_i x_{i|H}$$

(in altre parole, il valore atteso è una media ponderata dei redditi associati ai vari stati del mondo, i pesi essendo costituiti dalle probabilità associate ai vari stati del mondo).

Esempio 3.
Nell'esempio dell'agricoltore, il prospetto A ha valore atteso:

$$E(x)_A = \sum_{i=1}^{S} p_i x_{i|A} = 50(0,5) + 10(0,5) = 30$$

Il prospetto B ha valore atteso:

$$E(x)_B = \sum_{i=1}^{S} p_i x_{i|B} = 30(0,5) + 30(0,5) = 30$$

Entrambi i prospetti hanno il medesimo valore atteso.

Come si vede, due prospetti diversi possono avere lo stesso valore atteso. Una caratterizzazione più completa del prospetto si può ottenere valutando con una misura appropriata l'entità della dispersione dei redditi intorno al valore atteso. Come si può notare, il prospetto B garantisce comunque un valore di 30, sia che piova, sia che non piova. Non c'è dispersione del reddito intorno al valore atteso. Per il prospetto A, invece, 30 è solo un valore medio, mentre i redditi effettivi possono essere 10 con probabilità $0,5$ e 50 con probabilità $0,5$. Una buona misura della dispersione dei redditi intorno al valore atteso è la *varianza*.

Definizione. La varianza di un prospetto H, $Var(x)_H$ è definita come

$$E\left(x - E(x)_H\right)^2_{|H} = \sum_{i=1}^{S} p_i \left(x_i - \overline{x}_H\right)^2_{|H}$$

in altre parole è la media ponderata dei quadrati degli scarti dei redditi dal loro valore atteso, i pesi essendo nuovamente le probabilità.

Esempio 4.

Nell'esempio degli agricoltori il prospetto B ha varianza nulla, poichè gli scarti dei redditi dal valore atteso sono sempre nulli. Il prospetto A ha varianza:

$$Var(x)_A = (-20)^2\, 0,5 + (20)^2\, 0,5 = 400$$

Quando un prospetto ha varianza nulla, esso si riferisce a un piano d'azione dall'esito certo. Ebbene, la scelta in condizioni di incertezza può riguardare due o più prospetti con varianza positiva, essere cioè una scelta tra piani d'azione tutti dall'esito incerto, oppure prevedere un confronto tra uno o più prospetti con varianza positiva e un prospetto con varianza nulla. In tal caso si ha scelta tra situazioni incerte e situazioni certe. Nel nostro esempio, la scelta è tra un piano d'azione dall'esito incerto (prospetto A) e un piano d'azione dall'esito certo (prospetto B).

1.2 L'ordinamento dei prospetti

Abbiamo visto come i prospetti A e B presentino il medesimo valore atteso. Se l'agricoltore ordinasse i prospetti sulla base del valore atteso, la scelta tra fertilizzare e non fertilizzare dovrebbe risultare indifferente. Eppure è evidente che ricevere 30 con certezza – come nel caso di non fertilizzazione – oppure guadagnare in media 30 con una elevata varianza dei redditi non è esattamente la stessa cosa.

Fertilizzare il campo è come fare una scommessa: si rischia qualcosa per sperare di guadagnare di più. Si tratta di una scommessa particolare, nel senso che accettarla o non accettarla genera il medesimo valore atteso. Tecnicamente si dice che è una *scommessa equa* – un gioco che in media non genera per chi lo intraprende né guadagni, né perdite. Ma il nostro agricoltore può essere un tipo timoroso, che nel dubbio 'va sul sicuro', oppure un tipo spregiudicato che rischia volentieri un reddito basso nella speranza di poter avere un reddito più alto. Una buona teoria delle scelte in regime di incertezza deve cogliere questo aspetto soggettivo, questo atteggiamento verso il rischio degli operatori chiamati a decidere. Una risposta a questo problema viene dalla teoria dell'utilità attesa.

Assumiamo che l'individuo sia caratterizzato da una funzione di utilità $U = U(x)$, dove x è il reddito.

Possibili forme di questa funzione di utilità sono rappresentate nella Figura 1. In tutte e tre i casi illustrati nella figura l'utilità cresce al crescere del reddito. Nella $1(a)$ cresce in modo lineare, nella $1(b)$ cresce a tassi decrescenti, nella $1\,(c)$ cresce a tassi crescenti. Vedremo tra breve come queste tre tipologie siano associate a diversi 'atteggiamenti verso il rischio'. Per adesso definiamo la nozione di utilità attesa.

Definizione. Sia dato il prospetto H, $[x_1, x_2, ..., x_S; p_1, p_2, ..., p_S]_H$. Allora definiamo utilità attesa del prospetto H,

$$EU\,(x)_H = \sum_{i=1}^{S} p_i U\,(x_i)_{|H}$$

ovvero la media ponderata delle utilità conseguibili nei vari stati del mondo, i pesi essendo costituiti dalle probabilità che gli stati del mondo si verifichino.

Esempio

Sia la funzione di utilità dell'agricoltore $U = U\,(x) = \sqrt{x}$. Allora l'utilità attesa del prospetto A è

$$EU_{|A} = \sqrt{50}\,(0,5) + \sqrt{10}\,(0,5)$$

L'utilità attesa del prospetto B è:

$$EU_{|B} = \sqrt{30}\,(0,5) + \sqrt{30}\,(0,5)$$

Ebbene, la teoria delle scelte in condizioni di incertezza prevede che ciascun individuo ordini i prospetti a lui accessibili sulla base dell'utilità attesa. Esattamente come nella teoria tradizionale del consumatore quest'ultimo ordina i panieri di beni sulla base dell'utilità che essi conferiscono, la teoria dell'incertezza prevede che egli ordini i prospetti sulla base della loro utilità attesa.

La scelta rifletterà allora sia le caratteristiche soggettive del consumatore, riassunte nella sua funzione di utilità, sia i dati oggttivi del problema, sintetizzati nei possibili payoff e nelle probabilità associate ai diversi stati del mondo.

1.2.1 L'utilità attesa: un'analisi grafica

Nell'esempio precedente dell'agricoltore è facile verificare che egli deciderà per il prospetto B che gli garantisce una maggiore utilità attesa. Infatti:

$$EU_{|A} = \sqrt{50}\,(0,5) + \sqrt{10}\,(0,5) = 5,11$$

$$EU_{|B} = \sqrt{30}\,(0,5) + \sqrt{30}\,(0,5) = 5,47$$

Diamo un'interpretazione grafica di questo risultato. Nella Figura $2\,(a)$ è rappresentata la situazione dell'agricoltore nel caso in cui adotti il piano d'azione A (fertilizzare). Notiamo innanzitutto che la sua funzione di utilità è del tipo crescente e concavo della figura $1\,(b)$. Se piove il suo reddito è 50 con un'utilità pari a $\sqrt{50} = 7,07$, se non piove il suo reddito è 10 con un'utilità pari a $\sqrt{10} = 3,16$. L'utilità attesa del piano A è la media ponderata di queste utilità. Graficamente possiamo individuarla nel modo seguente:

- individuiamo i punti h e k (corrispondenti rispettivamente alla coppia reddito-utilità se non piove, h, e reddito-utilità se piove, k);
- congiungiamo con un segmento i due punti. Il segmento rappresenta tutte le possibili combinazioni lineari di h e k, cioè tutti i punti la cui ascissa è una media ponderata delle ascisse di h e k e la cui ordinata è una media ponderata (con i medesimi pesi) delle ordinate di h e k;
- cerchiamo sul segmento un punto z, la cui ordinata sia la media ponderata delle ordinate di h e k, i pesi essendo costituiti dalle probabilità di trovarsi in h o in k (nel nostro caso $0,5$ e $0,5$). Per costruzione l'ordinata di z è allora

  $$EU_{|A} = \sqrt{50}\,(0,5) + \sqrt{10}\,(0,5) = 5,11$$

  Notiamo che l'ascissa di z è per costruzione il valore atteso del prospetto A, cioè 30.

Nella Figura 2 (b) è rappresentata la situazione dell'agricoltore nel caso in cui adotti il piano d'azione B (non fertilizzare). Sia che piova, sia che non piova, il suo reddito è comunque 30. I punti h e k vengono a coincidere nel punto $z\prime$. Il segmento che abbiamo costruito nel caso precedente collassa quindi al punto $z\prime$, la cui ordinata costituisce l'utilità attesa, in realtà l'utilità certa, del prospetto B.

$$EU_{|B} = \sqrt{30}\,(0,5) + \sqrt{30}\,(0,5) = 5,47$$

Poichè in realtà adottando il prospetto B si ottiene 30 con certezza, di fatto è sufficiente valutare il valore di U per $x = 30$.

Nella Figura 2 (c) le Figure2 (a) e 2 (b) sono sovrapposte per facilitare il confronto. E' evidente che $z\prime$ giace al di sopra di z e quindi che l'utilità associata al prospetto B è maggiore dell'utilità (attesa) associata al prospetto A. Notiamo allora che, nonostante che i due prospetti prevedano il medesimo valore atteso – nonostante cioè che la 'scommessa'di fertilizzare sia equa – l'agricoltore sceglie di non fertilizzare il proprio campo. Preferisce 30 con certezza a una situazione aleatoria in cui 30 è la media tra possibili guadagni più elevati e possibili guadagni più bassi.

1.2.2 Funzione di utilità e utilità attesa

Il risultato che abbiamo appena ottenuto dipende in maniera sostanziale dal fatto che la combinazione lineare di h e k giace al di sotto della funzione $U(x)$. Questo avviene perchè la funzione di utilià dell'agricoltore $U(x) = \sqrt{x}$ è concava. Assumiamo che essa sia del tipo illustrato nella Figura 1 (a), sia cioè lineare: $U = U(x) = kx$. Quale sarebbe l'utilità attesa dei due prospetti?

$$EU_{|A} = U(50)\,(0,5) + U(10)\,(0,5) = k\,(50)\,(0,5) + k\,(10)\,(0,5) = k\,(30)$$

$$EU_{|B} = U(30)(0,5) + U(30)(0,5) = k(30)(0,5) + k(30)(0,5) = k(30)$$

I due prospetti risulterebbero del tutto indifferenti per l'agricoltore. Questo appare evidente anche da un'analisi grafica. Nella Figura 3 è analizzata l'utilità attesa del prospetto A. Come prima, i punti h e k rappresentano le coppie reddito-utilità se non piove oppure se piove. A differenza di quanto avveniva nel caso di funzione di utilità concava, il segmento che congiunge tali due punti non è sotteso alla funzione di utilità $U(x)$, ma coincide con essa. L'utilità attesa del prospetto A è l'ordinata del punto z, la cui ascissa è il valore atteso. Ma tale utilità attesa coincide con l'utilità attesa (invero certa) del prospetto B, cioè con l'utilità di ottenere 30.

Studiamo infine il caso in cui la funzione di utilità è del tipo $U(x) = x^2$. In questa situazione:

$$EU_{|A} = U(50)(0,5) + U(10)(0,5) = 2500(0,5) + 100(0,5) = 1300$$

$$EU_{|B} = U(30)(0,5) + U(30)(0,5) = 900(0,5) + 900(0,5) = 900$$

Chiaramente l'agricoltore opterebbe per il prospetto A. La Figura 4 analizza questo caso, secondo la procedura già tratteggiata. Il punto z ha quale ordinata l'utilità attesa di A. Esso giace al di sopra di $z\prime$, la cui ordinata è l'utilità attesa di B, ossia l'utilità di conseguire 30 con certezza.

Quali conclusioni possiamo trarre dalla nostra analisi? Definiamo *avverso al rischio* un individuo che rifiuta una scommessa equa, *neutrale al rischio* un individuo indifferente rispetto a una scommessa equa, *propenso al rischio* un individuo che accetta una scommessa equa. Allora è avverso al rischio un individuo la cui funzione di utilità sia concava, è neutrale al rischio un individuo la cui funzione di utilità è lineare, è propenso al rischio un individuo la cui funzione di utilità sia convessa. Notiamo infine che, per definizione, per un individuo neutrale rispetto al rischio l'ordinamento dei prospetti sulla base dell'utilità attesa coincide con un ordinamento sulla base del valore atteso.

1.3 Un'analisi più approfondita dell'avversione al rischio

Vi sono situazioni in cui un individuo avverso al rischio accetta scommesse, intraprende cioè azioni rischiose?

Riprendiamo l'esempio dell'agricoltore e immaginiamo che nel prospetto A (fertilizzare) il reddito associato allo stato del mondo 'piove' sia ora 60. Assumiamo che l'agricoltore sia avverso al rischio e in particolare che la sua funzione di utilità sia $\widehat{x} < \overline{x}$.

Il prospetto A risulta modificato nel modo seguente:

Prospetto del piano d'azione fertilizzare
(prospetto A)

(Stato del mondo)	reddito	probabilità
(Piove)	60	0,5
(Non piove)	10	0,5

E' immediato verificare che il valore atteso è adesso 35. Fertilizzare non è più una scommessa equa, o non lo è più in senso favorevole alla fertilizzazione. In media, ora, fertilizzando il campo, si guadagnano 5 unità di reddito in più che in caso contrario.

In questa situazione come si comporterà l'agricoltore? Applichiamo nuovamente il principio del confronto delle utilità attese:

$$EU_{|A} = U(60)(0,5) + U(10)(0,5) = \sqrt{60}(0,5) + \sqrt{10}(0,5) = 5,45$$

$$EU_{|B} = U(30)(0,5) + U(30)(0,5) = \sqrt{30}(0,5) + \sqrt{30}(0,5) = 5,47$$

Prospetto del piano d'azione fertilizzare
(prospetto A)

(Stato del mondo)	reddito	probabilità
(Piove)	70	0,5
(Non piove)	10	0,5

Il valore atteso sarebbe pari a 40 e il confronto tra le utilità attese porterebbe a una preferenza per il prospetto A. Infatti:

$$EU_{|A} = \sqrt{70}(0,5) + \sqrt{10}(0,5) = 5,76$$

$$EU_{|B} = \sqrt{30}(0,5) + \sqrt{30}(0,5) = 5,47$$

In questo caso l'individuo, per quanto avverso al rischio, accetta la scommessa (fertilizzare) poichè questa risulta sufficientemente vantaggiosa dal punto di vista statistico.

1.3.1 Abbiamo una misura dell'onere che il rischio impone su un individuo avverso al rischio?

Immaginiamo che il consorzio di cui l'agricoltore fa parte imponga comunque di fertilizzare. L'utilità attesa è dunque:

$$EU_{|A} = \sqrt{x_1}(0,5) + \sqrt{x_2}(0,5)$$

dove i pedici 1 e 2 indicano rispettivamente 'piove' e 'non piove'. La Figura 5 raffigura questa situazione. L'utilità attesa $EU_{|A}$ è l'ordinata del punto z. Notiamo che l'agricoltore trarrebbe la stessa utilità dal fatto di guadagnare un reddito certo $\widehat{x} < \overline{x}$, dove $\overline{x}$ è il valore atteso. Infatti, il punto w, appartenente alla funzione U, ha la stessa ordinata del punto z e ascissa pari a $\widehat{x}$. Il reddito $\widehat{x}$ è detto *equivalente di certezza* del reddito atteso $\overline{x}$ in situazione di rischio. In altre parole un reddito $\widehat{x}$ sicuro è equivalente, per un individuo avverso al rischio, a un maggior reddito atteso $\overline{x}$ in ambiente incerto. La differenza $\overline{x}-\widehat{x}$ è detta costo del rischio o premio per il rischio e rappresenta quanto l'individuo avverso al rischio sarebbe disposto a pagere pur di non dover accettare la scommessa (quanto l'agricoltore sarebbe disposto a pagare pur di non dover fertilizzare il campo). In generale, in una lotteria il premio per il rischio rappresenta l'ammontare di cui il valore atteso del prospetto 'partecipare alla lotteria' deve eccedere il valore (certo) del prospetto 'non partecipare' alla lotteria stessa.

L'idea che un individuo avverso al rischio sia disposto a pagare pur di non trovarsi coinvolto in una situazione incerta è alla base delle assicurazioni.

1.4 L'assicurazione

Un individuo possiede un'abitazione che gli attribuisce un reddito pari a 1000. In caso di incendio il reddito della casa si riduce a 100. La probabilità che si verifichi un incendio è pari a $0,05$. L'individuo ha una funzione di utilità del tipo $U(x) = \sqrt{x}$. Una compagnia di assicurazione è disposta a impegnarsi a rifondere il danno di 900 in caso di incendio dietro il pagamento di un premio assicurativo. Quanto sarà disposto a pagare l'individuo pur di assicurare la casa?

Applichiamo gli strumenti fin qui sviluppati. L'utilità attesa dell'individuo è:

$$EU = 0,95\sqrt{1000} + 0,05\sqrt{100} = 30,54$$

Ma $30,54$ è anche l'utilità di un reddito certo pari a (circa) $932,69$. Qualsiasi prospetto conferisca un reddito certo superiore (al limite uguale) a quest'ultima somma è preferibile (indifferente se uguale) alla situazione di incertezza in cui egli si trova. Il nostro agente sarà pertanto disposto a pagare fino a $1000 - 932,69 = 67,31$ per una polizza di assicurazione. E' agevole verificare che i prospetti:

Prospetto assicurarsi

Stato del mondo	reddito	pr.
(la casa non brucia)	$1000 - 67,31 = 932,69$	$0,95$
(la casa brucia)	$100 + 900 - 67,31 = 932,69$	$0,05$

Prospetto non assicurarsi

Stato del mondo	reddito	pr.
(la casa non brucia)	1000	$0,95$
(la casa brucia)	100	$0,05$

conferiscono esattamente la medesima utilità attesa. Va sottolineato che il valore atteso dell'esborso dell'assicurazione è pari a 45 ($= 900\,(0,05)$), ben inferiore al prezzo massimo che l'individuo è disposto a sopportare. Se l'assicurazione è neutrale rispetto al rischio, una polizza di 45 sarebbe sufficiente a farle assumere l'onere del rischio (si genererebbe infatti per l'assicurazione una scommessa equa, scommessa rispetto alla quale un agente neutrale al rischio è indifferente). Il fatto che l'assicurazione sia neutrale al rischio e l'individuo sia avverso al rischio rende conveniente a entrambi qualsiasi polizza assicurativa compresa tra 45 e $67,31$.